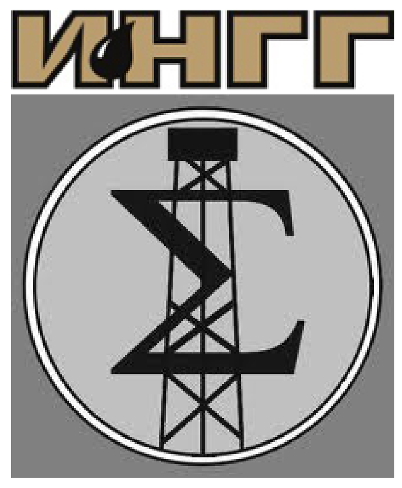
Численная гомогенизация многомасштабных сред со сложной структурой



М.И. Эпов, Э.П. Шурина, М.К. Артемьев
epovmi@ipgg.nsc.ru, shurina@online.sinor.ru, artemiev.mikhail@ngs.ru

Постановка задачи

Эффективные характеристики неоднородных сред широко применяются для решения практических задач науки и техники. В работе рассматривается гомогенизация удельного электрического сопротивления (УЭС) сред, содержащих мелкомасштабные контрастные включения различной геометрической формы.

Математическая модель

Рассмотрим задачу о распределении электрического потенциала u под действием постоянного тока в неоднородном объекте параллелепипедальной формы Ω, состоящем из матрицы Ω_1 и включений Ω_2, обладающих различным удельным электрическим сопротивлением ρ

$$\operatorname{div}\left(\rho^{-1}\operatorname{grad}\, u\right) = 0 \text{ в } \Omega. \qquad (1)$$

Внешняя граница расчетной области $\partial\Omega$ состоит из трех подобластей Γ_1 (верхняя грань), Γ_2 (нижняя грань) и Γ_3 (боковые грани). На границах Γ_1 и Γ_2 задано неоднородное условие Дирихле, что соответствует приложенным к граням электродам с заданным напряжением u_1 и u_2. На границе Γ_3 задано однородное краевое условие Неймана, что означает условие непротекания тока через боковые грани.

В работе предлагается численная гомогенизация УЭС на основе решения задачи (1)

$$\rho^e = \frac{S(u_1 - u_2)}{I},$$

где S – площадь сечения, перпендикулярного течению тока, I – полный ток, определяемый по формуле

$$I = \int_\Omega \left|-\rho^{-1}\nabla u\right| d\Omega.$$

Метод решения

В настоящее время существует большое количество многомасштабных методов, предназначенных для решения задачи (1). Среди них – метод суперэлементов Федоренко, гетерогенный многомасштабный метод и др. В работе рассматривается многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ), одним из основных отличий которого от классического МКЭ является наличие двух сеток – «грубой» и «мелкой», на каждой из которых определен свой набор базисных функций. Многомасштабные базисные функции $\psi_i, i = \overline{1, M}$, определенные на «грубой» сетке, неизвестны в аналитическом виде. Для их вычисления необходимо решить несколько (для функций первого порядка – 8) дополнительных задач внутри каждого суперэлемента $\Omega_k, k = \overline{1, N}$ на «мелкой» сетке

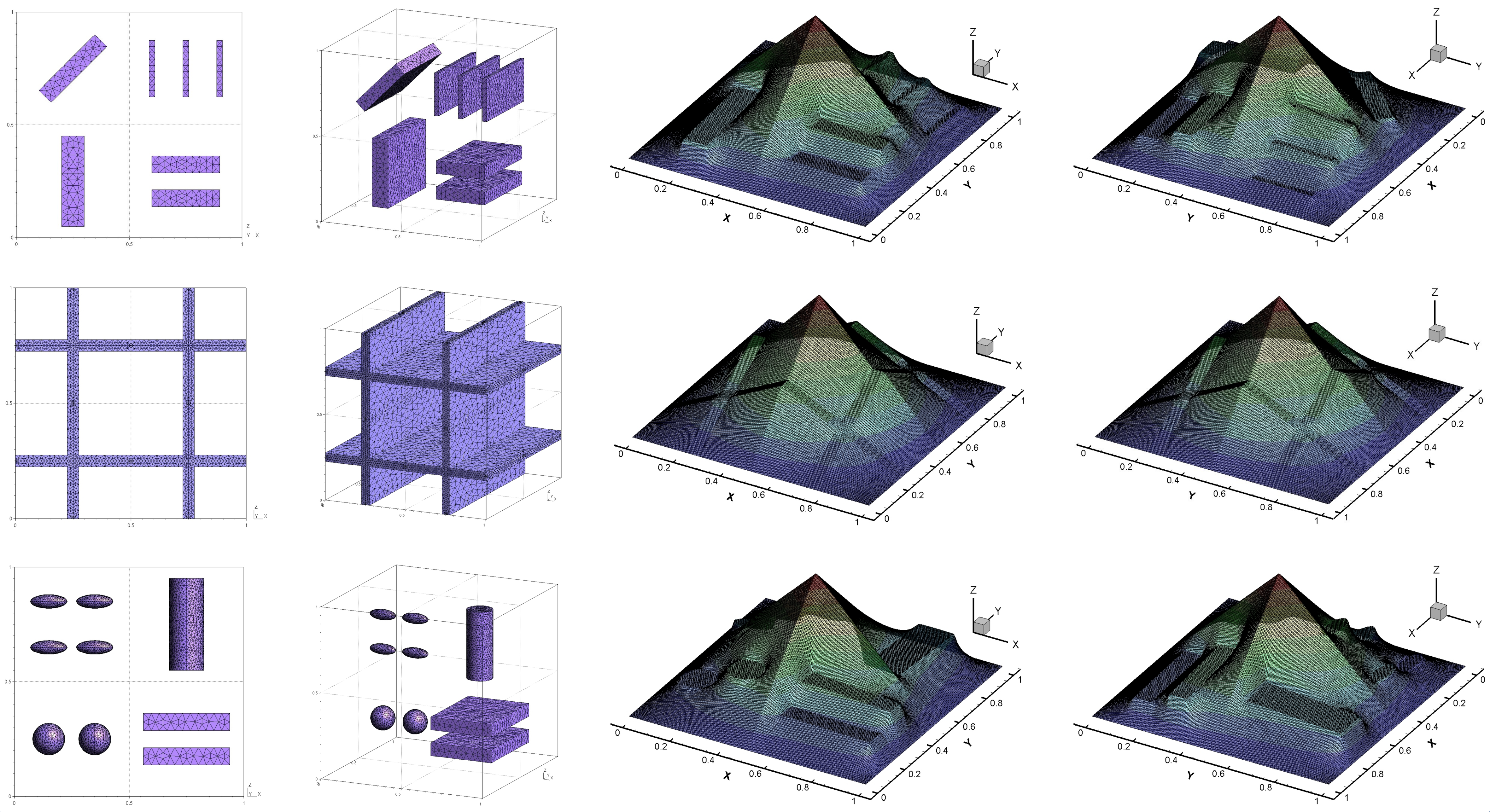
$$\operatorname{div}\left(\rho^{-1}\operatorname{grad}\, \phi_i\right) = 0 \text{ в } \Omega_k, \qquad (2)$$

$$\phi_i|_{\partial\Omega_k} = \mu_i, i = 1,..,8. \qquad (3)$$

Выбор μ_i произволен, но именно он определяет точность вычисления многомасштабных базисных функций, а, следовательно, и всей задачи.

Многомасштабные базисные функции

Ниже приведены примеры глобальных многомасштабных базисных функций для различных видов включений. Каждая из областей состоит из четырех суперэлементов, при этом базисная функция ассоциирована с центральным узлом «грубой» сетки. Поскольку функции трехмерны, для наглядности они выведены в сечении, проходящим через центр области в плоскости XZ.

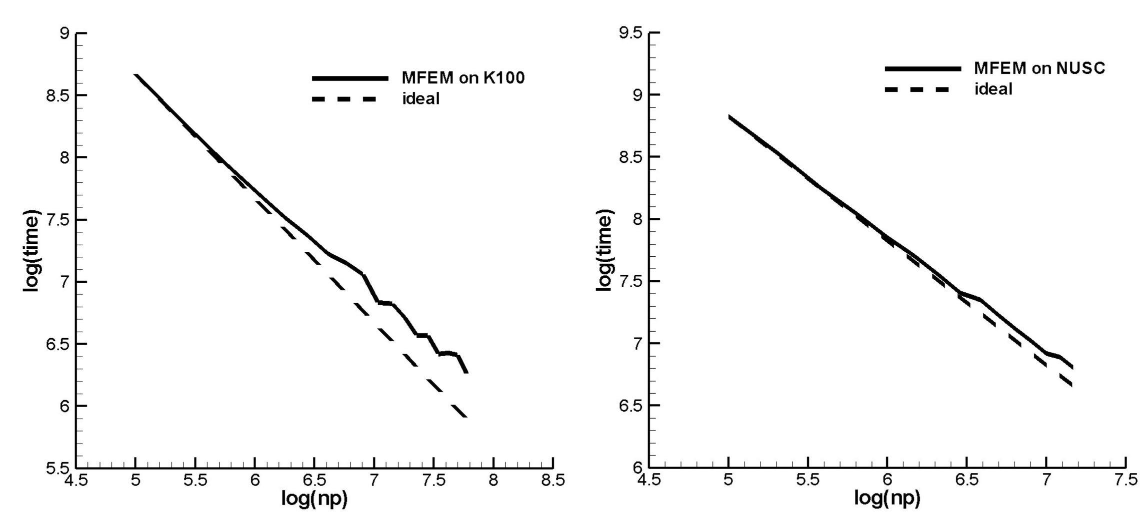


Параллельность алгоритма

Укрупненный алгоритм ММКЭ имеет следующую структуру

1. генерация грубой сетки
2. для каждого элемента «грубой» сетки:
   - 2.1. генерация «мелкой» сетки
   - 2.2. решение задач (2)-(3)
3. решение задачи (1)

Таким образом, шаг 2 алгоритма может быть выполнен независимо для всех суперэлементов. В этом заключается естественная параллельная структура алгоритма ММКЭ, которая может быть реализована достаточно эфективно. На рисунках ниже представлена зависимость среднего времени вычислений от количества ядер, участвующих в исследовании, для двух суперкомпьютеров: K100 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша (`www.kiam.ru`) и Информационно-вычислительного центра НГУ (`www.nusc.ru`). При этом пунктирная линия представляет идеальную производительность, когда время вычислений обратно пропорционально количеству задействованных ядер.

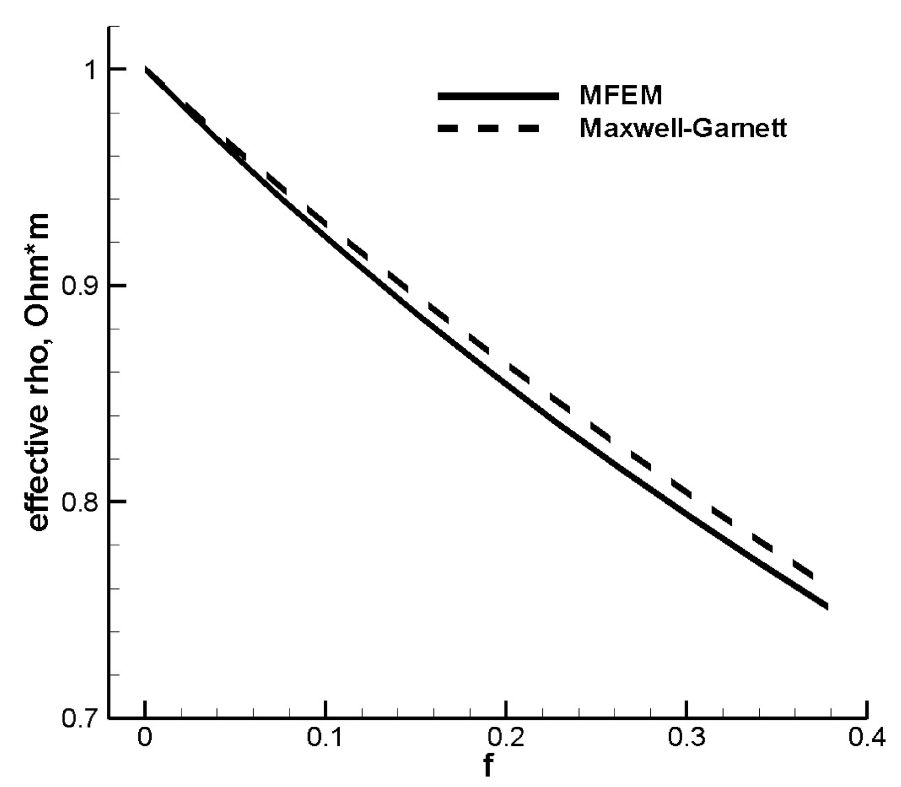


Результаты

Результатом численной гомогенизации является эффективная характеристика объекта. В данной работе – эффективное удельное электрическое сопротивление. Однако наибольший интерес представляет зависимость эффективной величины от объемной концентрации включений f, которая определяется как отношение объема включений к объему всего объекта. Для некоторых частных случаев такие зависимости известны в аналитическом виде. Например, для случая сферических включений считается справедливой формула Максвелла-Гарнетта

$$\rho^e = \rho_1 \left[1 - 3f\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2 + 2f(\rho_1 - \rho_2)}\right].$$

Ниже на рисунке представлены результаты, полученные при моделировании среды с сопротивлением матрицы $\rho_1 = 1$ и включений $\rho_2 = 0.5(\text{Ом} \cdot \text{м})$, в сравнении с формулой Максвелла-Гарнетта.



Заключение

В результате работы был реализован программный комплекс, основанный на вычислительных схемах многомасштабного метода конечных элементов, позволяющий проводить гомогенизацию объектов с контрастными мелкомасштабными включениями различной геометрической формы и расположения.

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН №98.