Метод Конечных СуперЭлементов Федоренко и некоторые его приложения

М.П. Галанин[1]
совместно с С.А. Лазаревой[2] и Е.Б. Савенковым[1]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Содержание

Задачи с локальными сингулярностями

Задачи с локальными "сингулярностями" физической или геометрической природы:

- локальные, но резкие, скачки коэффициентов задачи (композитные среды и т.п.);
- локальные нагрузки (точечные силовые воздействия или тепловые источники и т.п.);
- расчетные области с локальными геометрическими сингулярностями ("скважины" и т.п.);
- и многое другое ...

Задачи и решения

Общая задача

$$\mathrm{diam}\,(\text{“сингулярность”}) \ll \mathrm{diam}\,(\text{расчетная область})$$

Традиционные КЭ или КР приближения ведут к задачам очень высокой размерности (размер сетки $\mathrm{h} \approx 0.1\,\mathrm{diam}\,(\text{сингулярность})$).

Возможные решения:

- адаптивные сетки (требуют специальных средств генерации сетки).
- специальные приближения на грубой сетке (сильно задачно-зависимый подход).

Метод конечных суперэлементов Федоренко (1974)

МКСЭ Федоренко

В исходном варианте предложен как вариант традиционных приближений Петрова-Галеркина с "базисными" функциями, которые являются точными решениями рассматриваемого уравнения в каждом СЭ отдельно.

Такое определение не позволяет использовать хорошо развитую теоретическую основу МКЭ прямо.

Цель

Целью нашей работы является создание теоретического базиса для анализа метода и его продвижение в новые области применения.

Метод конечных суперэлементов Федоренко (1974)

Основные моменты МКСЭ

- МКСЭ основан на декомпозиции полной расчетной области на меньшие подобласти – суперэлементы.
- МКСЭ имеет дело с грубой (суперэлементной) сеткой.
- Данная СЭ сетка заведомо не может разрешить всю локальную сингулярность решения, но ведет к задаче малой размерности.
- Для разрешения локальной сингулярности внутри каждого СЭ отдельно используется тонкая (в случае МКЭ/МКР) сетка. Вспомогательные задачи на тонких сетках могут быть решены независимо.

Вводный пример

Уравнение Лапласа:

$$-\Delta \mathrm{u} = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\mathrm{u}|_{\partial\Omega} = \mathrm{g}.$$

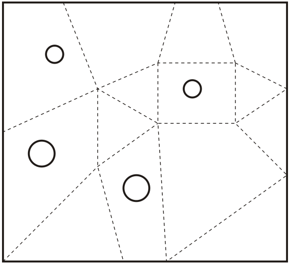


Figure: область и СЭ

Ω представляет собой многосвязную область с малыми "скважинами"
(случай геометрической сингулярности).
$\Omega = \cup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{k}}$, где Ω_{k} – суперэлементы.

Вводный пример

Формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} -\Delta u v \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \, d\gamma.$$

Общепринятое средство получения слабой постановки задачи:

$$\text{найти } u \in V: \quad a(u,v) = 0, \quad \forall v \in V_0; \quad u|_{\partial\Omega} = g;$$

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega,$$

$$V_0 = \{u \in V: \ u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad V = W_2^1(\Omega).$$

Вводный пример

Оператор Пуанкаре-Стеклова

$$\mathrm{P}:\ \varphi|_{\partial\Omega} \mapsto \mathrm{P}\varphi = \left.\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \vec{\mathrm{n}}}\right|_{\partial\Omega},$$

где u является решением задачи:

$$\mathrm{u}|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad -\Delta \mathrm{u} = 0 \text{ в } \Omega.$$

Общепринятый инструмент анализа методов декомпозиции области (введены В.И. Лебедевым, В.И. Агошковым в 80^{x}).

Вводный пример

Оператор Пуанкаре-Стеклова:

- действует на границе области;
- отображает ГУ Дирихле в эквивалентные условия Неймана;
- наследует свойства исходной задачи (непрерывность, симметричность и положительную определенность).

Главное используемое свойство

Действует подобно “черному ящику” и позволяет свести рассмотрение на границу области

Вводный пример

Оператор Пуанкаре-Стеклова:

- действует на границе области;
- отображает ГУ Дирихле в эквивалентные условия Неймана;
- наследует свойства исходной задачи (непрерывность, симметричность и положительную определенность).

Главное используемое свойство

Действует подобно “черному ящику” и позволяет свести рассмотрение на границу области

Уравнение для следов: уравнение Лапласа

Вариационное уравнение для следов

Формула Грина + операторы П.-С. = вариационное уравнение для следов решения φ на СЭ границах:

$$\varphi \in \mathrm{V}_{\Gamma} : \quad \mathrm{b}(\varphi, \psi) = \mathrm{f}(\psi), \quad \forall \psi \in \mathrm{V}_{\Gamma,0};$$

- форма $\mathrm{b}(\cdot,\cdot)$ является билинейной, непрерывной и положительно определенной;
- функция φ вводит следы решения на СЭ границах;
- пространства V_{Γ} и $\mathrm{V}_{\Gamma,0}$ вводят подходящие пространства следов и определены на границах СЭ.

Пространства следов

Пространства следов:

$$V_{\Gamma} = \left\{ \varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{K} : \quad \exists v \in V,\ \forall k = \overline{1, K},\ \varphi_k = v|_{\partial\Omega_k} \right\},$$
$$V_{\Gamma,0} = \left\{ \varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{K} : \quad \exists v \in V_0,\ \forall k = \overline{1, K},\ \varphi_k = v|_{\partial\Omega_k} \right\}.$$

- Функции φ_k определены на $\partial\Omega_k$.
- Такой выбор V_{Γ}, $V_{\Gamma,0}$ обеспечивает непрерывность почти всюду общего решения при переходе через СЭ границы раздела (на гладких частях).

Уравнение для следов: уравнение Лапласа

Пусть Ω_k являются суперэлементами и $\Omega = \cup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \Omega_\mathrm{k}$.
Тогда $\mathrm{b}(\cdot,\cdot)$ представляет собой форму:

$$\mathrm{b}(\varphi, \psi) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \langle \mathrm{P}_\mathrm{k} \varphi_\mathrm{k}, \psi_\mathrm{k} \rangle_{\partial\Omega_\mathrm{k}},$$

где

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega_\mathrm{k}}$ является скалярным произведением в $\mathrm{L}_2(\partial\Omega_\mathrm{k})$.
- P_k обозначает оператор П.-С. для исходного уравнения и СЭ Ω_k.

Правая часть

$$\mathrm{f}(\psi) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \langle \nu_\mathrm{k}, \psi_\mathrm{k} \rangle_{\partial\Omega_\mathrm{k}},$$

определяется ГУ Неймана или правой частью исходной задачи.

Метод конечных суперэлементов Федоренко

МКСЭ метод

Проекционный метод (Бубнова-Галеркина или Петрова-Галеркина) решения вариационного уравнения для следов:

найти $\varphi_h \in V^h_\Gamma: \quad b(\varphi_h, \psi_h) = f(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in V^h_{\Gamma,0}; \quad \varphi_h|_{\partial\Omega} = g_h.$

- Здесь V^h_Γ и $V^h_{\Gamma,0}$ являются некоторыми конечномерными подпространствами на V_Γ и $V_{\Gamma,0}$.
- Фактически вводят приближение условий слабой непрерывности нормальных производных решения при пересечении СЭ границ.

Вычислительная процедура

Стадия 1

- Разбить область на СЭ.
- Определить наборы граничных базисных и пробных функций для следов ($\overline{\varphi}_{\mathrm{h}}$).

Стадия 2

Для каждой граничной базисной функции на каждом СЭ рассчитать значения операторов П.-С. (соответствующая задача решается приближенно на каждом СЭ отдельно с $\overline{\varphi}_{\mathrm{h}}$ в качестве ГУ).
Здесь может быть использована разнообразная техника: МКЭ, МКР, МГИУ и т.д.

Вычислительная процедура

Стадия 1

- Разбить область на СЭ.
- Определить наборы граничных базисных и пробных функций для следов ($\overline{\varphi}_{\mathrm{h}}$).

Стадия 2

Для каждой граничной базисной функции на каждом СЭ рассчитать значения операторов П.-С. (соответствующая задача решается приближенно на каждом СЭ отдельно с $\overline{\varphi}_{\mathrm{h}}$ в качестве ГУ).
Здесь может быть использована разнообразная техника: МКЭ, МКР, МГИУ и т.д.

Вычислительная процедура

Стадия 1

- Разбить область на СЭ.
- Определить наборы граничных базисных и пробных функций для следов ($\overline{\varphi}_\mathrm{h}$).

Стадия 2

Для каждой граничной базисной функции на каждом СЭ рассчитать значения операторов П.-С. (соответствующая задача решается приближенно на каждом СЭ отдельно с $\overline{\varphi}_\mathrm{h}$ в качестве ГУ).
Здесь может быть использована разнообразная техника: МКЭ, МКР, МГИУ и т.д.

Вычислительная процедура

Стадия 3

Рассчитать СЭ матрицу жесткости и найти СЭ решение (т.е. приближение следов решения на СЭ границах).

Стадия 4

- Рассчитать полное решение во всей области.
- На этой стадии нет необходимости рассчитывать СЭ вспомогательные задачи, вся информация уже получена на стадии 3.

Вычислительная процедура

Стадия 3

Рассчитать СЭ матрицу жесткости и найти СЭ решение (т.е. приближение следов решения на СЭ границах).

Стадия 4

- Рассчитать полное решение во всей области.
- На этой стадии нет необходимости рассчитывать СЭ вспомогательные задачи, вся информация уже получена на стадии 3.

Вычислительная процедура

Стадия 3

Рассчитать СЭ матрицу жесткости и найти СЭ решение (т.е. приближение следов решения на СЭ границах).

Стадия 4

- Рассчитать полное решение во всей области.
- На этой стадии нет необходимости рассчитывать СЭ вспомогательные задачи, вся информация уже получена на стадии 3.

МКСЭ и МКЭ: сходства

Сходства

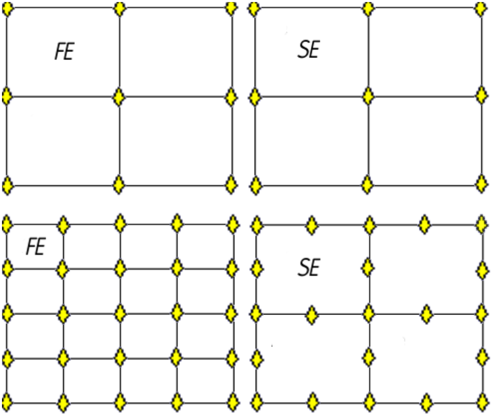
- С алгоритмической точки зрения МКСЭ может быть рассмотрен как естественный МКЭ с некоторыми специфичными для данной задачи “базисными” функциями, которые выбираются так, чтобы быть точными решениями рассматриваемого уравнения в каждом СЭ.
- Внутри каждого СЭ эти “базисные” функции являются точными решениями рассматриваемого уравнения с ГУ, порожденными граничными базисными функциями $\overline{\varphi}_{\mathrm{h}}$.

МКСЭ и МКЭ: различия

Различия

- Эти самые “базисные” функции, определенные внутри СЭ, не имеют каких-либо аппроксимирующих свойств (поскольку они наследуют избыточную информацию о решении задачи).
- Граничные базисные функции имеют аппроксимирующие свойства в отличие от СЭ “базисных” функций, определенных внутри СЭ.
- СЭ сетка не является разностной сеткой и вводит лишь декомпозицию всей области на меньшие части.
- В отличие от традиционных проекционно-сеточных (например, МКЭ) методов параметром аппроксимации является размер граничной сетки h, а не размер СЭ сетки (приближенное решение сходится к точному, когда $h \to 0$).

МКСЭ и МКЭ: различия



h = H

h = H/2

МКСЭ и МДО

Уравнение для следов представляет собой условия слабой непрерывности нормальных производных на СЭ границах.

МКСЭ

Уравнение для следов в слабой форме + проекционные методы = МКСЭ

МДО

Уравнение для следов в операторной форме + итерационные методы = традиционный МДО

МКСЭ и МДО

Уравнение для следов представляет собой условия слабой непрерывности нормальных производных на СЭ границах.

МКСЭ

Уравнение для следов в слабой форме + проекционные методы = МКСЭ

МДО

Уравнение для следов в операторной форме + итерационные методы = традиционный МДО

Общий случай

- Исходная задача:

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f} \text{ в } \Omega;$$

- Формула Грина:

$$(\mathrm{Au}, \mathrm{v})_\Omega = \mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{v})_\Omega + \langle \delta \mathrm{u}, \gamma \mathrm{v} \rangle_{\partial\Omega},$$

  где δ – оператор "нормальной производной", γ – оператор взятия следа;

- Оператор Пуанкаре-Стеклова:

$$\mathrm{P} : \varphi \mapsto \mathrm{P}\varphi = \delta \mathrm{U}\big|_{\partial\Omega},$$

  где U обозначает решение задачи

$$\mathrm{AU} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathrm{U}\big|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Примеры

- Оператор Лапласа (рассмотрен выше):

$$\mathrm{A} = -\Delta, \quad \mathrm{a}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int\limits_{\Omega} \nabla \mathrm{u} \nabla \mathrm{v}\, d\Omega, \quad \delta \mathrm{u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \vec{\mathrm{n}}}, \quad \gamma \mathrm{u} = \mathrm{u}|_{\partial\Omega}.$$

- Оператор конвекции-диффузии:

$$\mathrm{A} = -(\vec{\mathrm{c}}_1 \nabla)\mathrm{u} + \operatorname{div}(\vec{\mathrm{c}}_2 \mathrm{u} - \kappa \nabla \mathrm{u}) - \lambda \mathrm{u},$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int\limits_{\Omega} (\vec{\mathrm{c}}_1 \nabla \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} - \mathrm{u} \cdot \vec{\mathrm{c}}_2 \nabla \mathrm{v} + \kappa \nabla \mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{v})\, d\Omega,$$

$$\delta \mathrm{u} = (\kappa \nabla \mathrm{u} - \vec{\mathrm{c}}_2 \mathrm{u}) \cdot \vec{\mathrm{n}}, \quad \gamma \mathrm{u} = \mathrm{u}|_{\partial\Omega}.$$

Примеры

- Оператор линейной теории упругости:

$$\mathrm{Au} = -\operatorname{div}\sigma(\mathrm{u}), \quad \mathrm{a}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\mathrm{u})\epsilon(\mathrm{u})\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$\delta\mathrm{u} = \sigma(\vec{\mathrm{u}})\cdot\vec{\mathrm{n}}, \quad \gamma\vec{\mathrm{u}} = \vec{\mathrm{u}}|_{\partial\Omega},$$

$$\sigma_{\mathrm{ij}} = 2\mu\epsilon_{\mathrm{ij}} + \lambda\epsilon_{\mathrm{kk}}\delta_{\mathrm{ij}}, \quad \epsilon_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathrm{u_j}}{\partial\mathrm{x_j}} + \frac{\partial\mathrm{u_i}}{\partial\mathrm{x_i}}.\right)$$

Основные моменты

- Для всех представленных выше случаев (и других) вариационные уравнения для следов имеют единообразную форму и могут быть сконструированы однородным способом – так же, как и их конечномерные приближения (МКСЭ).
- Данный подход обеспечивает единообразную теоретическую основу для данного метода и его обоснования, т.е.
  - анализ ошибок (оценка для ошибки решения сводится к оценке ошибки интерполяции)
  - позволяет конструировать различные варианты МКСЭ (соответствующие различным версиям приближений Бубнова- и Петрова-Галеркина)

Основные моменты

- Алгоритм работает для задач с внешними силами и различными ГУ (Неймана и смешанными ГУ).
- Возможно сконструировать комбинированные МКЭ/МКСЭ приближения (СЭ не покрывают всю расчетную область).

Рассмотренный выше формализм позволяет использовать традиционную и хорошо развитую теорию вариационных уравнений и проекционно-сеточных методов для анализа данного метода.

Теоретическое исследование МКСЭ

Открытые вопросы:

- определение порядка сходимости МКСЭ;
- выявление аппроксимационных параметров, влияющих на сходимость решения и его производных;
- получение точных априорных оценок погрешности приближения;
- исследование приближенного решения в углах декомпозиции.

Основные сложности:

- аппроксимация МКСЭ нетривиальна;
- необходимо работать не со слабыми, а преимущественно с сильными (и гладкими) решениями задач;
- “обычная” методика исследования неприменима и требуется разработка нового подхода к анализу МКСЭ.

Оценка качества приближения решения

Разрешимость задачи Дирихле в пространстве H^1

Ошибка расчета в энергетическом пространстве $H^1(\Omega)$:

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \backsimeq \sum_k \|\gamma u - \gamma \bar{u}\|_{H^{1/2}(S_k)}$$

где $\bar{u}$ – приближенное решение, γ – оператор взятия следа (ограничение функции на S).

- Использована теория интерполяции между пространствами и известные подходы к анализу МКЭ
- Доказана насыщаемость метода и получены точные априорные оценки погрешностей

Априорные оценки погрешностей решения

Априорные оценки погрешностей МКСЭ:

при $\nu \geq \mathrm{R}-1$:

$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_R \frac{1}{(\nu+1)^{R-1}} |I|^{R-1} |\gamma u|_{H^{R-1/2}(S)},$$

при $\nu \leq \mathrm{R}-1$:

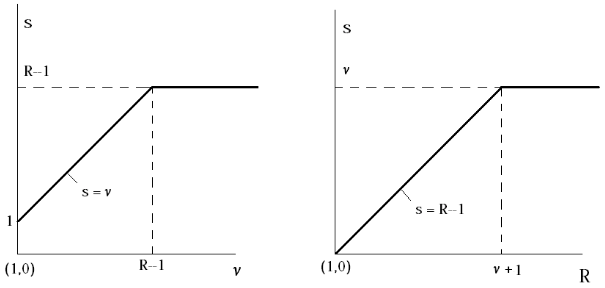
$$\|u-\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\nu \cdot |I|^{\nu} |\gamma u|_{H^{\nu+1/2}(S)}.$$

$|I|$ – шаг граничной сетки, ν – степень полинома, $u \in H^R(\Omega)$ – точное и $\bar{u}$ – приближенное решение.

Насыщаемость по гладкости

Погрешность решения МКСЭ:

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot |I|^s \, |\gamma u|_{H^{s+1/2}(S)} \, .$$



$|I|$ – шаг граничной сетки, ν – степень полинома, R – гладкость u.

Сложности исследования

Задача Дирихле:

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,\ u \in H^1(\Omega)$$
$$u|_{\partial\Omega} = g,$$
$$\Omega = \cup_{k=1}^{K} \Omega_k.$$

u – гладкое в окрестностях $\partial\Omega_k$ (принцип МКСЭ).

Пусть $u \in H^M(\Omega)$, $M > 1$.

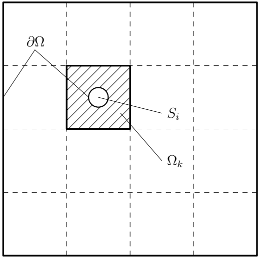


Figure: область и СЭ

Исследование γu не учитывает гладкость u в углах СЭ:

$\gamma:\ H^M(\Omega) \to H^{M-1/2}(I)$, где I – дост. гладкие части границы разбиения (ребра СЭ)

Гладкость приближенных решений

Асимптотика в углу многоугольного суперэлемента:

Приближенное решение $\bar{u}$

1. При $\pi/\alpha \in \mathbb{Z}$, $\pi/\alpha \le \nu$:
$$\bar{u} = \sum_{q=j\pi/\alpha} r^q \ln r \cdot \psi'_q(\theta) +$$
$$+ \sum_{q \neq j\pi/\alpha} r^q \cdot \psi''_q(\theta)$$
2. Иначе: $\bar{u} = \sum_{q=0}^{\nu} r^q \cdot \psi_q(\theta)$

Любое при $\gamma^0 u \in H^{R-1/2}$

$$u = u_{reg} + u_{sing}$$
$$u_{sing} = \sum_{q=0}^{Q} k_q r^\lambda \log^q r \cdot \varphi_q(\theta),$$
$\lambda = j\pi/\alpha$ либо $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

$\bar{u} = O(r^{\pi/\alpha} \ln r) \in H^{\pi/\alpha}$ либо $\bar{u}$ – обладает макс. гладкостью относит. г.у.

Анализ погрешностей производных

$\hookrightarrow$ На примере суперэлемента с раствором угла $0 < \alpha < \pi$;

Априорные оценки погрешностей производных МКСЭ

1. Константная погрешность МКСЭ при $|\mathrm{I}| \to 0$. При $\pi/\alpha \in \mathbb{Z}$, $\pi/\alpha \leq \nu$ (пр.рац.др. α/π при $\nu > 2$ и $\nu = 2$ в квадрате).
2. Погрешность производных решения порядка больше единицы в норме $\mathrm{H}^1(\Omega)$ расходится
3. Необходимое и достаточное условие сходимости градиентов обеспечивает $\mathrm{k_q} = 0$. Граничные базисные функции МКСЭ должны являться следами некоторого гармонического полинома в координатах, связанных с углом суперэлемента.

Методы суперэлементов

СЭ – группа специально выделенных КЭ.

Пример одного СЭ: $\mathrm{S} \in \Omega$ – подобласть. Введена триангуляция.

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f},$$

где A – матрица жесткости, u – узловые значения, f – правая часть. $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_\mathrm{s}, \mathrm{u}_\mathrm{b})$ – на $\Omega \setminus \mathrm{S}$, S и $\partial\mathrm{S}$. Связь через u_b. Финитность.

Методы суперэлементов

$$\begin{bmatrix} A_{bb} & A_{bs} & A_{b0} \\ A_{sb} & A_{ss} & 0 \\ A_{0b} & 0 & A_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ u_s \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ f_s \\ f_0 \end{bmatrix}$$

$$u_s = A_{ss}^{-1} f_s - A_{ss}^{-1} A_{sb} u_b.$$

$$\begin{bmatrix} A_{bb} - A_{bs} A_{ss}^{-1} A_{sb} & A_{b0} \\ A_{0b} & A_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b - A_{bs} A_{ss}^{-1} f_s \\ f_0 \end{bmatrix}.$$

Понижение порядка системы исключением неизвестных для части узлов.

Родственные методы:

- варианты МСЭ;
- варианты МДО;
- The Method of Supercells – Briggs, Lewis;
- Residual-Free Bubbles (RFB) - методы на элементах с нулевой невязкой – Brezzi, Franca;
- МНК - метод наименьших квадратов;
- метод Треффтца;
- многие другие...

Уравнение Лапласа

Постановка задачи:

$$-\Delta \mathrm{u} = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\mathrm{u}\big|_{\partial\Omega} = \mathrm{g},$$
$$\Omega = \cup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{k}}.$$

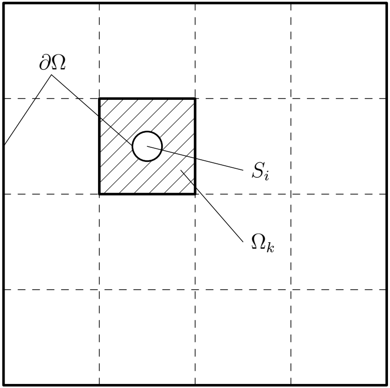
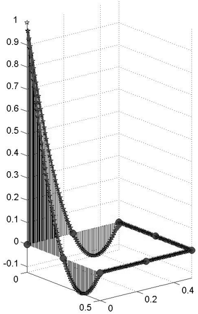


Figure: область и СЭ

Граничные базисные функции

Граничные базисные функции

- полиномы
- тригонометрические
- сплайны
- кусочно-линейные
- ...



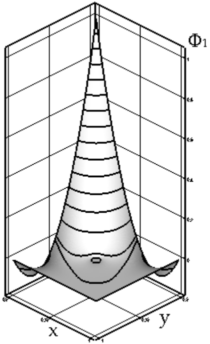


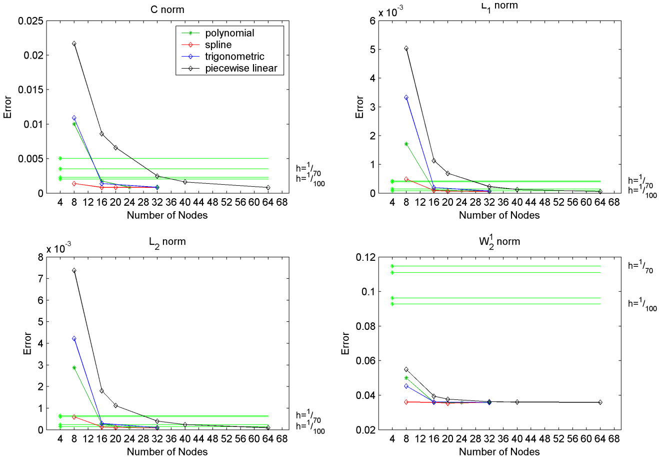
Figure: вид граничных базисных функций и СЭ “базисных” функций

Сходимость, число и размер СЭ фиксированы

Зависимости погрешности МКСЭ от числа узлов гран. сетки.

Различные варианты БФ.

Сравнение МКСЭ и МКЭ



Скорости численной сходимости

	Полином	Сплайн	Кусочно-линейные
C	2.29	0.61	1.62
L_1	2.92	2.23	2.19
L_2	3.03	1.99	2.11
C (СЭ узлы)	2.95	1.69	1.71

Table: скорости численной сходимости МКСЭ

СЭ решение имеет неустранимую ошибку, порожденную приближенностью решения вспомогательных СЭ задач.

Примеры решений

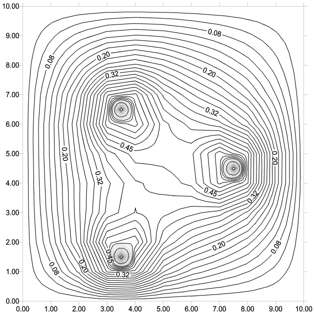


Figure: 3 “скважины”

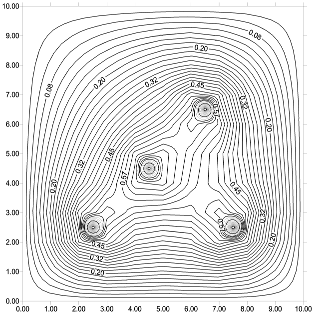


Figure: 4 “скважины”

$$\mathrm{d}(\text{скважины})/\mathrm{d}(\Omega) = 10^{-2},\ \Omega = [0, 10] \times [0, 10],\ \mathrm{N}_{\mathrm{SE}} = 10 \times 10.$$

Постановка задачи. Моделирование рельсотронов

$$\frac{DH}{Dt} - (\vec{v}, \nabla)H = \operatorname{div}(-\vec{u}H + \frac{1}{4\pi\sigma}\nabla H) \text{ в } \Omega,$$

$$\text{ГУ: } H = h \text{ на } \Gamma_1, -(\vec{n}, \vec{u})H + \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2,$$

$$\text{НУ: } H = 0, t = 0,$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{u}_A(t),$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = 0 \text{ в } \Omega_R, \vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_A(t) \text{ в } \Omega_A,$$

$$\Omega = \Omega_A \cup \Omega_R, \Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

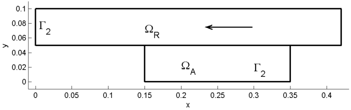
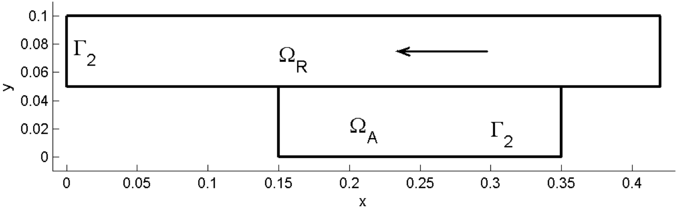
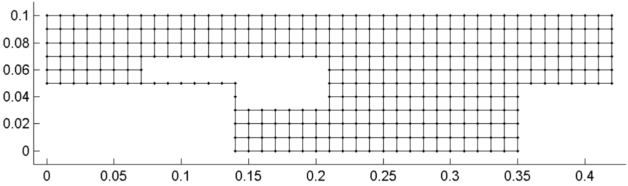


Figure: Половина рельсотрона

Область и расчетная сетка



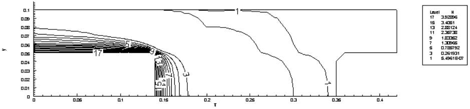


Суперэлементная сетка (273+1 СЭ)

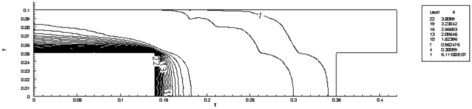
Результаты расчетов

МКСЭ, комбинированные МКЭ/МКСЭ аппроксимации, МКЭ

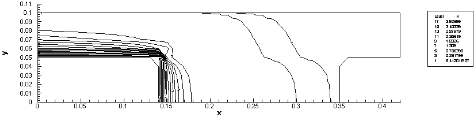
МКСЭ:
1 особый СЭ
(36 узлов),
273 СЭ (4 узла),
1128 БФ



МКЭ/МКСЭ:
1 особый СЭ
(36 узлов),
273 КЭ,
36 БФ



МКЭ:
325 КЭ



Задачи теории упругости

Постановка задачи:

$$-\operatorname{div}\sigma(\vec{u}) = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\vec{u}|_{\Gamma_1} = \vec{g},$$
$$\sigma(u)\cdot\vec{n}|_{\Gamma_2} = \vec{f},$$
$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$
$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij},$$
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right).$$

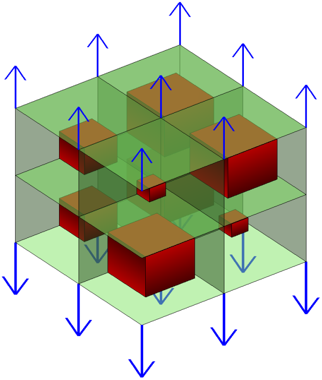


Figure: область и СЭ

Граничные базисные функции

- область разбита на СЭ кирпичеобразной формы
- каждый СЭ содержит только одно “включение”
- граничные базисные функции сконструированы как традиционные 2d КЭ на СЭ границах
- для этой цели использованы треугольные КЭ сетки на сторонах СЭ
- для решения вспомогательных задач использован традиционный МКЭ

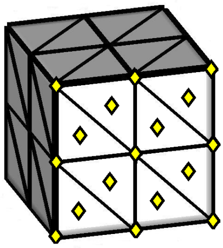
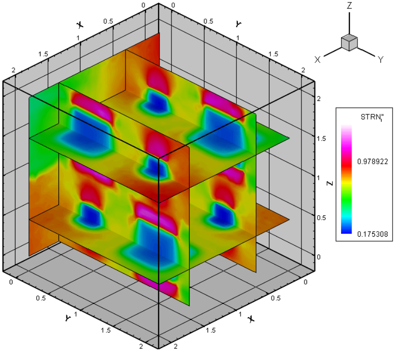
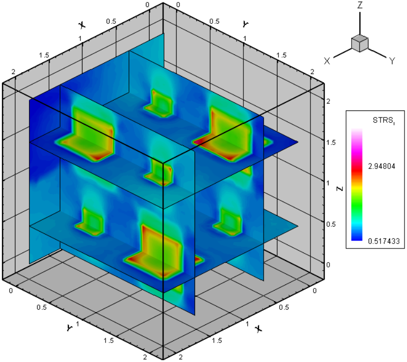


Figure: СЭ и их граничная сетка

Результаты расчетов

Область 2x2x2 СЭ. 2 типа СЭ (большие и малые кубические включения). Интенсивности деформаций и напряжений.





Граничные базисные функции

- Граничные базисные функции:
  - линейные
  - квадратичные
  - кубические лагранжевы
  - кубические эрмитовы
- Параметры моделирования:
  - число СЭ граничных узлов на одной СЭ границе: 8 – 500
  - число СЭ в расчетной области:

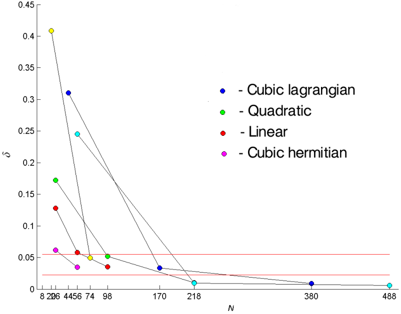
$$\text{от } 2 \times 2 \times 2 \text{ до } 15 \times 15 \times 15$$

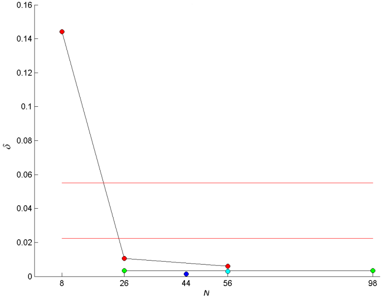
  - число точек вспомогательной сетки в одном СЭ: до $1.5 \cdot 10^5$

Итого: до $\sim 10^8$ точек вспомогательной сетки в расчетной области

Относительные ошибки

Зависимости погрешности решения от числа узлов в СЭ (норма C). Различные варианты БФ. Разбиения на 8 и 125 СЭ.





Скорости сходимости

граничная базисная функция	скорость сходимости (норма $C(\Omega)$)
линейная	1.47
квадратичная	1.28
кубическая лагранжева	1.8
кубическая эрмитова	1.69

Table: численные скорости сходимости

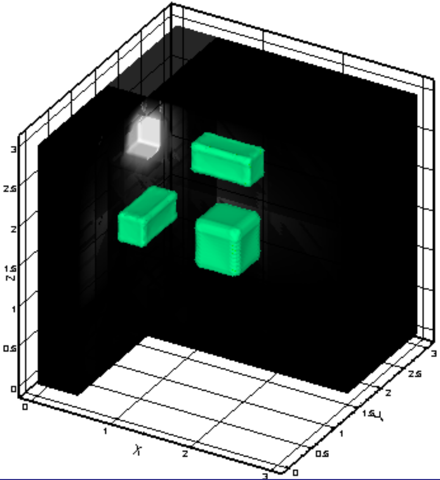
СЭ решение имеет неустранимые ошибки, порожденные приближенностью решения вспомогательных СЭ задач.

Пример решения

Уравнения линейной теории упругости без внешней силы и следующими ГУ:

$$u_i|_{\Gamma} = 0, \quad u_i|_{\Gamma_{hole}} = 1,$$

Γ_{hole} является границей "отверстия" и $\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_{hole}$.



Пример решения

Область: $3 \times 3 \times 3$ суперэлемента. Контурный график u_i в плоскости $x_2 = 1.5$.

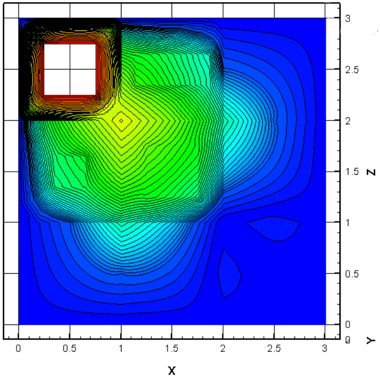


Figure: линейные функции формы

Пример решения

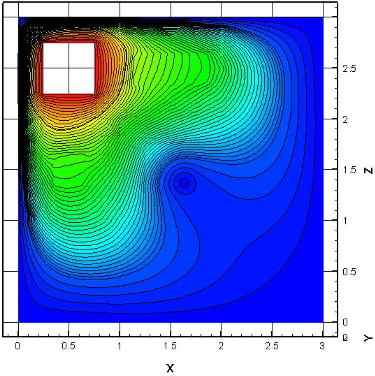


Figure: квадратичные функции формы

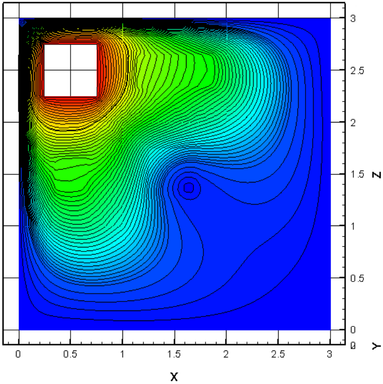


Figure: кубические функции формы

Матрица и армирование

Область $N_\Omega = N \times N \times N$.

Каждый СЭ содержит сферическое включение радиусом $R \in [0.0, 0.45]$.

Параметры упругости:

- E_m, μ_m - для материала матрицы;
- E_f, μ_f. - для армирования.

Результаты вычислений

$E = E_3, \mu = \mu_1 (\approx \mu_2)$ – параметры упругости композита.

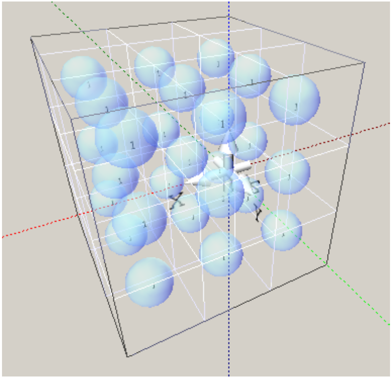
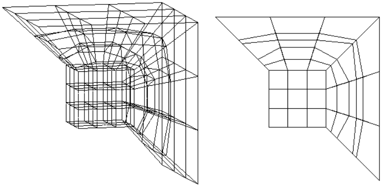


Figure: пример области, СЭ сетка

Локальная сетка СЭ

N_R - параметр КЭ дискретизации для одного СЭ.

Пример предварительной сетки ($N_R = 3$)



Пример результатов дискретизации СЭ сетки

N_R	Узлы	Ребра
4	1159	7194
6	3597	23096
8	8171	53470
10	15553	103020

Эффективные параметры

Модуль Юнга, композит с включениями, регулярная структура ($E_m = 1$, x - объемная доля волокон, y - модуль Юнга)

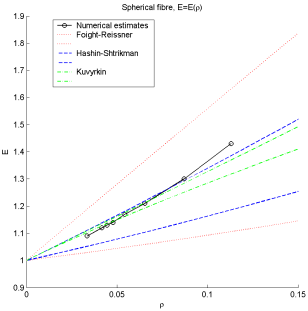


Figure: Шары: $E_f = 6.5$

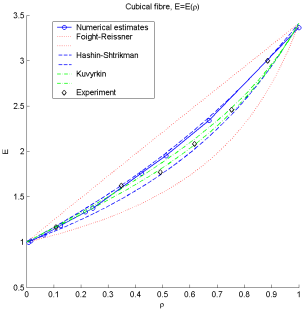


Figure: Кубы: $E_f = 3.41$

СЭ одного типа. Зависимость $\mathrm{E}(\mathrm{E_f})$, $\mu(\mathrm{E_f})$

$$\mathrm{E_m} = 1.0; \mathrm{E_f} \in [1.0; 15.0]; \mu_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{f} = 0.33; \mathrm{R} = 0.3.$$

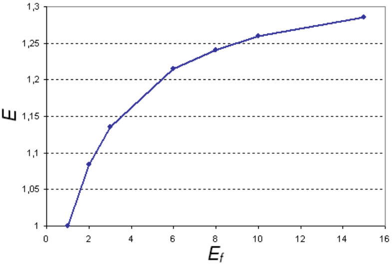


Figure: $\mathrm{E}(\mathrm{E_f})$

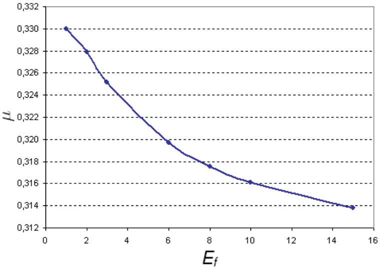
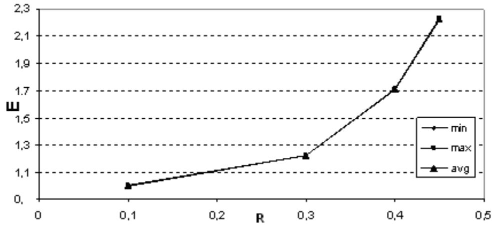


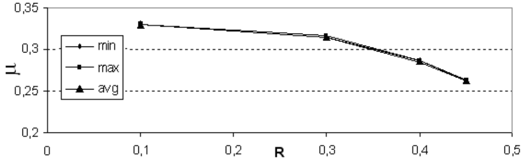
Figure: $\mu(\mathrm{E_f})$

СЭ одного типа. Зависимость E(R), μ(R)

Параметры:

парам.	знач.
E_m	1.0
E_f	6.5
μ_m	0.33
μ_f	0.25
R	0..0.45





СЭ одного типа. Зависимость $E(N_R)$, $\mu(N_R)$

Параметры:

парам.	знач.
E_m	1.0
E_f	6.5
μ_m	0.33
μ_f	0.25
R	0.3
N_R	3..14

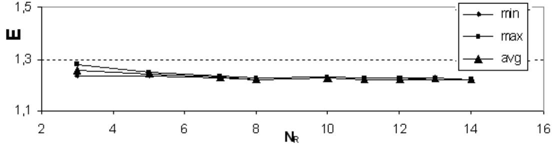


Figure: $E(N_R)$

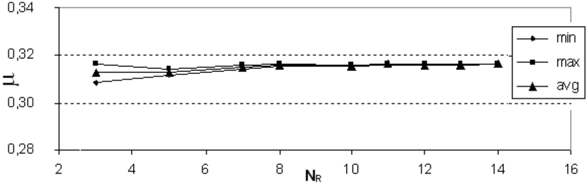


Figure: $\mu(N_R)$

СЭ одного типа. Зависимость E(N), μ(N)

Параметры:

парам.	знач.
E_m	1.0
E_f	6.5
μ_m	0.33
μ_f	0.25
R	0.3
N	1..30

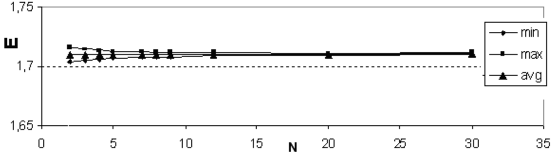


Figure: E(N)

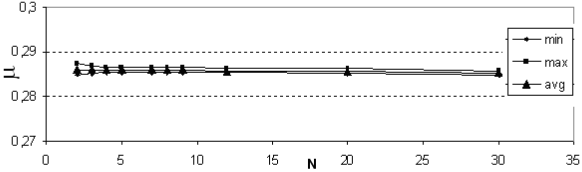


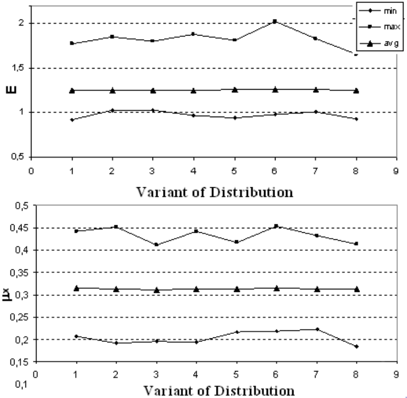
Figure: μ(N)

Несколько типов СЭ. Случайная область

Зависимость параметров E, μ_1 от варианта конфигурации области.

Параметры:

парам.	знач.
E_m	1.0
E_f	6.5
μ_m	0.33
μ_f	0.25
R_i	0.1, 0.3, 0.4
N	10
N_{SE}	3



3D расчет распределения электрического потенциала и плотности тока в проводнике

Задача определения удельной электрической проводимости σ пористого материала:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathrm{j} = 0 \text{ в } \Omega \\ \operatorname{rot} \mathrm{E} = 0 \text{ в } \Xi \\ \mathrm{E} = -\operatorname{grad} \varphi \\ \mathrm{j} = \sigma^0 \mathrm{E} \text{ в } \Omega \\ + \text{ гр.усл.} \end{gathered}$$

Область $\Xi = \Omega \cup \omega$.

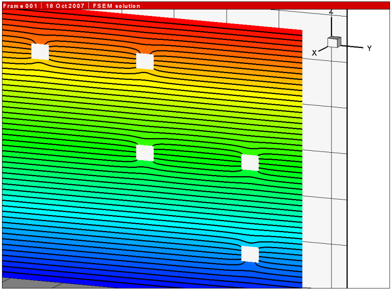
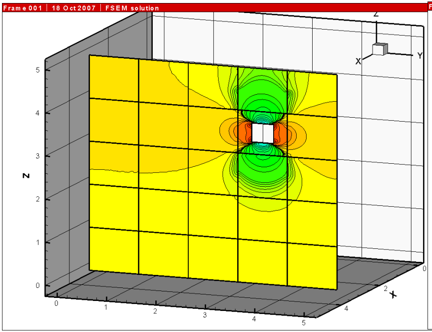
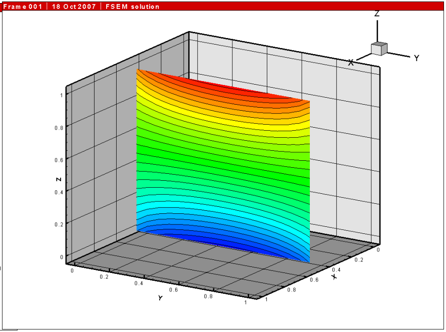


Figure: Область Ξ. Потенциал φ в сечении $\mathrm{x} = \mathrm{const}$

3D расчет распределения потенциала и тока

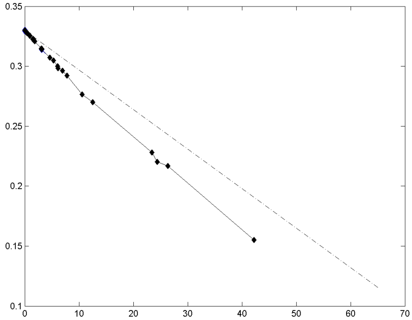
Модуль вектора плотности |j| электрического тока и потенциал φ в части области ω.





Расчет усредненной проводимости пористого материала

Зависимость σ от объемной пористости



Заключение

- Развит алгоритм теоретического анализа МКСЭ. Он обеспечивает единообразную теоретическую базу для анализа метода.
- Главным объектом подхода является вариационное уравнение для следов. Традиционная и хорошо развитая теория могут быть использованы для анализа и исследования приближений метода.
- Выполнено численное исследование метода. Рассмотрен ряд 2d и 3d задач. Метод продемонстрировал свою эффективность и устойчивость.

Публикации Р.П. Федоренко

1. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одной специальной разностной схеме // Численные методы МСС. Новосибирск. СО АН СССР. 1974. Т. 5, № 1. С. 149-163.
2. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 950-960.
3. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР. 1987. № 171. 26 с.
4. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Расчет напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР. 1994. № 97. 26 с.
5. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд - во МФТИ, 1994. 528 с.
6. Федоренко Р.П. Некоторые задачи и приближенные методы вычислительной механики // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34, № 2. С. 223-241.
7. Fedorenko R.P. Finite Superelements Method and Multigrid Method in Problems of Elasticity Theory // CFD Journal. 1996. V. 5, N 2.

Публикации авторов

1. Galanin M., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method as special Galerkin approximation // Mathematical Modelling and Analysis. 2002. V. 7, N 1. P. 41-50.

2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43, № 5. С. 713-729.

3. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Метод конечных суперэлементов в задачах математической физики в неоднородных областях // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. № 3. С. 34 - 49.

4. Galanin M., Savenkov E., Temis J. Finite Superelements Method for Elasticity Problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10, № 3. P. 237 - 246.

5. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Совместное использование метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 43, N. 5. С. 270-283.

6. Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Numerical Investigation of the Finite Superelement Method for the 3d Elasticity Problems // Mathematical Modelling and Analysis. 2007. V. 12, № 1. P. 39 - 50.

7. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Темис Ю.М., Щеглов И.А., Яковлев Д.А. Применение метода конечных суперэлементов для расчета характеристик дисперсно - армированных композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 3. С. 54–68.

Публикации авторов

[8] Galanin M., Lazareva S., Savenkov E. Fedorenko Finite Superelement Method and Its Applications // Computational Methods in Applied Mathematics. 2007. V. 7, N 1. P. 3-24.

[9] Galanin M., Milyutin D., Savenkov E. Finite Superelements Method for Biharmonic Equation // Mathematical Modeling and Analysis. 2007. V. 12, No. 3. P. 309 - 324.

[10] Метод конечных суперэлементов и его применения для решения задач науки и техники. / Галанин М.П., Лазарева С.А., Савенков Е.Б., Яковлев Д.А. // Параллельные вычислительные технологии. 2007: Сборник трудов международной конференции. Челябинск, 2007. С. 87–100.

[11] Лазарева С.А. Аппроксимационные свойства метода конечных суперэлементов Федоренко. // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 8. Спец. вып. С. 75–81.

[12] Лазарева С.А. Анализ точности приближений метода конечных суперэлементов Федоренко. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2008. № 2. С. 3–27.

[13] Galanin M., Lazareva S. Local regularity and asymptotic behaviour of Fedorenko finite superelement method solution // Int. J. Computing Science and Mathematics. 2009. V. 2, N. 3. P. 201–221.

[14] Galanin M., Lazareva S. On the Analysis of the Fedorenko Finite Superelement Method for Simulation of Processes with Small-Scale Singularities // American Institute of Physics Conference Proceedings. 2009. V. 1186. P. 327–334.

[15] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд - во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.

Благодарности

Благодарности

- – организаторам за приглашение
- – всем присутствующим за внимание

Гранты

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00109)