

Классические и квантовые дискретные динамические системы

MPAMCS 22-27 августа 2012

Дубна, Ратмино

Владимир Корняк

Лаборатория информационных технологий
Объединенный институт ядерных исследований
Дубна

26 августа 2012

Исходные замечания. “Конечное” и “бесконечное” в физике

- 1 Вопрос о том, “является ли реальный мир **дискретным** или **непрерывным** (**конечным** или **бесконечным**)” относится исключительно к **метафизике** — никакие эмпирические наблюдения или логические аргументы не в состоянии обосновать тот или иной выбор — это вопрос **веры, вкуса** или **привычки**
- 2 Поскольку никакие **эмпирические последствия** выбора между конечным и бесконечным **невозможны** — “**физика не зависит от метафизики**” — мы будем рассматривать задачи динамики в конструктивной “**конечной**” постановке без всякого риска исказить физическое содержание проблем
- 3 Прагматические преимущества “конечного” подхода:
 - ▶ отсутствие лишних сущностей позволяет сконцентрироваться на содержательной стороне физических задач
 - ▶ по факту дискретная математика богаче непрерывной
 - ▶ конечность описания необходима для самой возможности компьютерного моделирования физических систем

Пуанкаре

- 1 “Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. **Непрерывность** . . . , без сомнения, **изобретена нами**, но изобрести ее нас вынудил внешний мир. Без нее не было бы анализа бесконечно малых. Все математическое знание свелось бы к **арифметике** или к **теории подстановок**.
Но мы, напротив, посвятили изучению непрерывности почти все наше время, почти все наши силы. не будем столь строги; мы будем признательны непрерывности, которая, если даже **все исходит из целого числа**, одна только была способна извлечь из него так много.” (1904 г.)
- 2 “Теперь уже нельзя говорить, что «природа не делает скачков» (*Natura non facit saltus*), — на самом деле она поступает именно наоборот. И не только материя, возможно, **сводится к атомам**, а даже и мировая история и, я скажу, **даже само время**. . . .” (1912 г.)
- 3 “Однако не следует слишком спешить, ибо сейчас очевидно лишь то, что мы весьма далеки от завершения борьбы между двумя стилями мышления — одного, характерного для атомистов, **верящих в существование простейших первоэлементов, очень большого, но конечного числа комбинаций которых достаточно для объяснения всего разнообразия аспектов Вселенной,** и другого, присущего приверженцам идей непрерывности и бесконечности.” (1912 г.)

Дискретная математика содержательно богаче непрерывной

T.Tofooli: "... differential equations that are the poor man's cellular automata. . ."

Краткий обзор простых непрерывных и конечных групп

Группы Ли	Конечные группы
4 бесконечных ряда A_n, B_n, C_n, D_n	16 + 1 + 1 бесконечных рядов $A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), G_2(q)$ - Chevalley;
5 исключительных E_6, E_7, E_8, F_4, G_2	${}^2A_n(q^2), {}^2D_n(q^2), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3)$ - Steinberg; ${}^2B_n(2^{2n+1})$ - Suzuki; ${}^2F_4(2^{2n+1})$ - Ree, Tits; ${}^2G_2(3^{2n+1})$ - Ree
	\mathbb{Z}_p - циклические простого порядка; A_n - альтернирующие
	26 спорадических групп
	$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ - Mathieu, единственные нетривиальные 4- и 5-транзитивные
	J_1, J_2, J_3, J_4 - Janko; Co_1, Co_2, Co_3 - Conway; $Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}$ - Fischer; HS - Higman-Sims; McL - McLaughlin; He - Held; Ru - Rudvalis; Suz - Suzuki; $O'N$ - O'Nan; HN - Harada-Norton; Ly - Lyons; Th - Thompson; B - Baby Monster;
	M - Monster; наибольшая спорадическая, содержит все другие спорадические, кроме 6 парий: $J_1, J_3, J_4, Ru, O'N, Ly$
	John McKay открыл знаменитый "monstrous moonshine" Richard Borcherds доказал используя методы теории струн (филдсовская премия)

Смешивание состояний в физике ароматов

Фермионы в Стандартной Модели образуют 3 поколения кварков и лептонов

Фермионы \ Поколения	1	2	3
Верхние кварки	u	c	t
Нижние кварки	d	s	b
Заряженные лептоны	e^-	μ^-	τ^-
Нейтрино	ν_e	ν_μ	ν_τ

Переходы между верхними и нижними кварками в секторе кварков и состояниями ароматов и массовыми состояниями нейтрино в лептонном секторе описываются матрицами смешивания

Кабиббо–Кобаяси–Маскавы

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

и Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}$$

Данные нейтринных осцилляций содержат

наиболее яркие свидетельства фундаментальной роли конечных симметрий

Феноменологическая картина

- Ароматы ν_μ и ν_τ с одинаковыми весами входят во все 3 массовые состояния ν_1, ν_2, ν_3 (называется “бимаксимальное смешивание”)
- все 3 аромата равно представлены в ν_2 (“тримаксимальное смешивание”)
- ν_e отсутствует в ν_3

$$\Rightarrow \text{вероятности } (|U_{\alpha\beta}|^2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

→ унитарная матрица (Харрисон, Перкинс, Скотт)

$$U_{\text{HPS}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

U_{HPS} (“трибимаксимальная матрица смешивания”) совпадает с матрицей разбивающей натуральное представление группы S_3 (перестановки 3-х элементов) на неприводимые компоненты

Это вызвало всплеск активности в построении моделей с конечными группами

В кварковом секторе картина более смазанная, но есть ряд признаков конечных групп, например, кварк-лептонная комплементарность

Группы, популярные в моделях физики ароматов

- $T = A_4$ — группа тетраэдра
- $T' = SL(2, 3)$ — двойная накрывающая группы A_4
- $O = S_4$ — группа октаэдра
- $I = A_5$ — группа икосаэдра
- D_N — диэдральная группа (N четное)
- Q_N — кватернионная группа (N делится на 4)
- $\Sigma(2N^2)$ — группы со структурой $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_2$
- $\Delta(3N^2)$ — структура $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_3$
- $\Sigma(3N^3)$ — структура $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes \mathbb{Z}_3$
- $\Delta(6N^2)$ — структура $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N) \rtimes S_3$

Математики рассчитывают на "Монстра" в физике

Вера в реализуемость исключительных математических структур в природе

----- Original Message -----

From: "mckayjoh" <mckayjoh@gmail.com>

To: <kornyak@jinr.ru>

Sent: Wednesday, September 21, 2011 4:45 PM

Subject: Finite groups & physics

Dear Prof. McKay,

Thank you for your interest in application of finite groups in physics.

There are many reasons to believe that future fundamental physics will be based on finite groups.

> Has anyone determined all the subgroups of the group of the standard model?

The internal (gauge) symmetry of the standard model is a product of the groups $U(1)$, $SU(2)$ and $SU(3)$.

There are papers devoted to finite subgroups of these groups with applications to physics.

For example, in <http://xxx.lanl.gov/abs/1006.0098>, 1006.1479, 1101.2308 finite groups having 3D faithful irreps -- i.e., subgroups of $SU(3)$ (all classified) and $U(3)$ (computed up to some order) -- are discussed. You can also find numerous references in these papers.

> I have a finite group = M = the monster of order about 10^{54} .

> Do you have a home for it in physics?

As I see in the internet the minimal faithful irrep of the monster has dimension 196883

and minimal degree of faithful permutation action is 97239461142009186000 $\sim 10^{20}$

(as I can conclude from the list of subgroups at <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/spor/M>).

Clearly all this is far beyond the standard model.

But the SM is not an ultimate truth - it is only phenomenological fitting (with about 20 parameters)

of experimental data obtained at about 10^{16} GeV. Really fundamental physics must appear

at the "grand unification" scale (10^{16} GeV) which is close to the Planck scale (10^{19} GeV).

So, who knows, may be there is a room for the monster in physics.

Best regards,

Vladimir Kornyak

Исходные математические структуры

● Числа

полукольцо натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

алгебраическое расширение примитивным \mathcal{P} -м корнем из единицы $\mathbb{r}_{\mathcal{P}}$

\Rightarrow циклотомические натуральные $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$ совпадают с

кольцом циклотомических целых $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ если $\mathcal{P} \geq 2$

в частности \mathbb{Z} — расширение \mathbb{N} с помощью примитивного квадратного корня из 1

\Rightarrow циклотомическое поле $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ — поле частных кольца $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$

$\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ конструктивно воспроизводит (всюду плотно в) \mathbb{C} если $\mathcal{P} \geq 3$

● Расслоение

(E, X, S, G, π)

кратко E

E — тотальное пространство расслоения

X — база

S — типичный (модельный) слой

G — структурная группа

$\pi : E \rightarrow X$ — проекция

$S_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X$ — слой над точкой базы

$S_x \sim S \Leftrightarrow S_x g_x^{-1} = S$ для некоторого $g_x \in G$

Структурная группа через калибровочную связность позволяет “сравнивать” данные в разных точках времени и пространства

Основные понятия и структуры динамики

- $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ или $\mathcal{T} = [0, 1, \dots, T]$ — время, нумерация событий
- $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ — (каноническое) множество состояний
- $G = \{g_1, \dots, g_M\} \leq \text{Sym}(\Omega) \cong S_N$ — группа симметрий состояний
- $(W, \mathcal{T}, \Omega, G, \tau)$ — динамическая система (расслоение над временем)
- $h \in \prod_{t \in \mathcal{T}} \Omega_t$ — эволюция (траектория) динамической системы
 $h = \dots \rightarrow w_{t-1} \rightarrow w_t \rightarrow w_{t+1} \rightarrow \dots$ — сечение расслоения W , $w_t \in \Omega_t$
- $\chi(t_1, t_2) \in G$ — связность (параллельный перенос) задает изоморфизм между слоями: $\Omega_{t_2} = \Omega_{t_1} \chi(t_1, t_2)$
- Принцип калибровочной инвариантности = возможность задавать систему координат в слоях независимо друг от друга \Rightarrow правило преобразования связностей $\chi(t_1, t_2) \rightarrow g_{t_1}^{-1} \chi(t_1, t_2) g_{t_2}$, $g_{t_1}, g_{t_2} \in G$

Классический подход:

идентичность состояний задана глобально (в одной и той же системе координат)

$W = \mathcal{T} \times \Omega$; траектории — функции от времени $h \in \Omega^{\mathcal{T}}$

рассматриваются индивидуальные траектории вместо совокупностей

Динамические системы с пространством

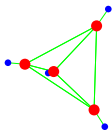
- $X = \{x_1, \dots, x_{|X|}\}$ — пространство
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{|\Sigma|}\}$ — локальные состояния
- $F = \{f_1, \dots, f_{|F|}\} \leq \text{Sym}(X)$ — симметрии пространства
- $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{|\Gamma|}\} \leq \text{Sym}(\Sigma)$ — внутренние симметрии
- $\Omega = \prod_{x \in X} \Sigma_x$ — полное множество состояний
= сечения расслоения $(E, X, \Sigma, \Gamma, \pi)$
- $G = \Gamma \wr_X F \cong \Gamma^X \rtimes F$ — полная группа симметрий (сплетение)
- Адекватная “дискретная” формализация идеи “близости” точек — абстрактный симплициальный комплекс
Для всех целей достаточен 1-остов (1-скелет) абстрактного симплициального комплекса = граф
⇒ пространство X (база расслоения E) имеет структуру графа
абстрактное ребро графа — выделенная пара вершин $e_{i,j} = \{x_i, x_j\}$
- Дискретная версия связности — Γ -значная функция на ребрах
$$\mu(\{x_i, x_j\}) \equiv \mu(x_i, x_j) \in \Gamma$$
- Параллельный перенос вдоль пути $x_{i_1} \rightarrow x_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow x_{i_{k-1}} \rightarrow x_{i_k}$
$$\mu(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \mu(x_{i_1}, x_{i_2}) \mu(x_{i_2}, x_{i_3}) \cdots \mu(x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$$

Симметрии графов угле(водо)родных молекул и наноструктур

Тетраэдран C_4H_4

$$F = S_4$$

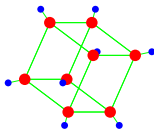
$$F_{loc} = S_3 \cong D_6$$



Кубан C_8H_8

$$F = S_4 \times \mathbb{Z}_2$$

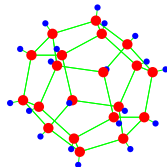
$$F_{loc} = D_6$$



Додекаэдран $C_{20}H_{20}$

$$F = A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

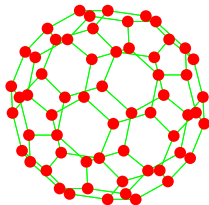
$$F_{loc} = D_6$$



Фуллерен C_{60}

$$F = A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

$$F_{loc} = \mathbb{Z}_2$$



Тороидальный графен $n \times m$

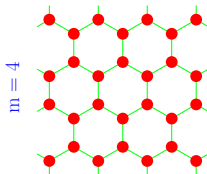
$$F = D_n \times D_{2m} \quad F = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rtimes D_6$$

$$F_{loc} = \mathbb{Z}_2$$

$$F_{loc} = D_6$$

$$n, m \rightarrow \infty$$

$n=6$



$m=4$

Непрерывные калибровочные теории в физике

- $X = M$ — пространство-время Минковского с точками $x = (x^\nu) \in M$
- Σ — комплексные векторные пространства (локальные состояния)
- Γ — унитарные группы (внутренние симметрии) действующие на Σ

Замена параллельного переноса линейной комбинацией разностей координат точек (гипотеза о применимости производных к эмпирическим величинам)

$$\implies \mu(x, x + \Delta x) \approx \mathbf{1} + A_\nu(x) \Delta x^\nu$$

Коэффициенты $A = (A_\nu)$ — 1-форма со значениями в алгебре Ли группы Γ

Калибровочное преобразование $\mu'(x, x + \Delta x) = \gamma(x)^{-1} \mu(x, x + \Delta x) \gamma(x + \Delta x)$

после приближений $A'_\nu(x) = \gamma(x)^{-1} A_\nu(x) \gamma(x) + \gamma(x)^{-1} \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x^\nu}$

2-форма кривизны $F = dA + [A \wedge A]$ описывает силовые поля в физике

— инфинитезимальная голономия (параллельный перенос вокруг замкнутого пути)

Простейший калибровочно инвариантный лагранжиан $L_{YM} = \text{Tr} [F \wedge \star F]$ дает

уравнения Янга-Миллса $\xrightarrow{\Gamma = U(1)}$ Максвелла

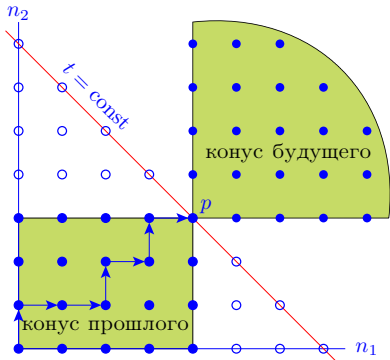
$$dF + [A \wedge F] = 0 \quad \text{тождество Бьянки} \qquad dF = 0$$

$$d \star F + [A \wedge \star F] = 0 \qquad d \star F = 0$$

Возникновение пространства в дискретной динамике

Пространство (и время) в некоторых теориях — производные концепции (струны, каузальные множества, спиновые сети ...)

- Наблюдатель “воспринимает” и “запоминает” потоки $h = s_0 s_1 \cdots s_t$ символов N различных типов: $s_i \in \Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$
- “Причинность” и “световой конус” возникают совершенно естественно: невозможно получить больше чем t символов за t наблюдений



- **Время t всегда** полное число всех наблюдений = длина последовательности h :
 $t = n_1 + \cdots + n_N$
 n_i — кратность символа σ_i в последовательности h
- **Координаты точки p — функции** $p^1(h), \dots, p^K(h)$ последовательности h
Правильное определение координат должно
 - ▶ учитывать симметрии Σ
 - ▶ в континуальном приближении (в пределе больших t и n_i) воспроизводить симметрии Лоренца

Простая модель: два символа $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ с симметрией S_2

$$S_2 = \{(), (1, 2)\} \cong \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad p = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

расщепление действия S_2 на p на инвариантные подмодули

$$\Rightarrow e' = e \quad r' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad p' = \begin{pmatrix} n_1 + n_2 =: t \text{ время} \\ n_1 - n_2 =: x \text{ пространство} \end{pmatrix}$$

Физическое предположение — схема Бернулли: σ_1 и σ_2 в длинных отрезках $h = s_0 s_1 \dots s_t$ появляются с фиксированными частотами p_1 и p_2 ($p_1 + p_2 = 1$)

Вероятность отдельной h — биномиальное распределение

$$P(n_1, n_2) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}$$

формула Стирлинга при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$; “скорость” $v := p_1 - p_2$ ($-1 \leq v \leq 1$)

$$P(x, t) \approx \tilde{P}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right\}$$

$$\xrightarrow{t'=t-T, x'=x-vT} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \exp \left\{ -\frac{1}{2T} \left(\frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 \right\} + O\left(\frac{t'}{T}\right)$$

\Rightarrow уравнение теплопроводности (диффузии, Фоккера-Планка)

$$\frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial x} = \frac{(1-v^2)}{2} \frac{\partial^2 \tilde{P}(x, t)}{\partial x^2}$$

в пределе “скорости света” $|v| = 1$ волновое уравнение $\frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial t} \pm \frac{\partial \tilde{P}(x, t)}{\partial x} = 0$

Особенности детерминистической динамики

$(\omega_{t-k}, \dots, \omega_t) \in \prod_{\tau=t-k}^t \Omega_\tau$ — эволюции фиксированной длины

Для введения закономерностей необходимы какие-то ограничения

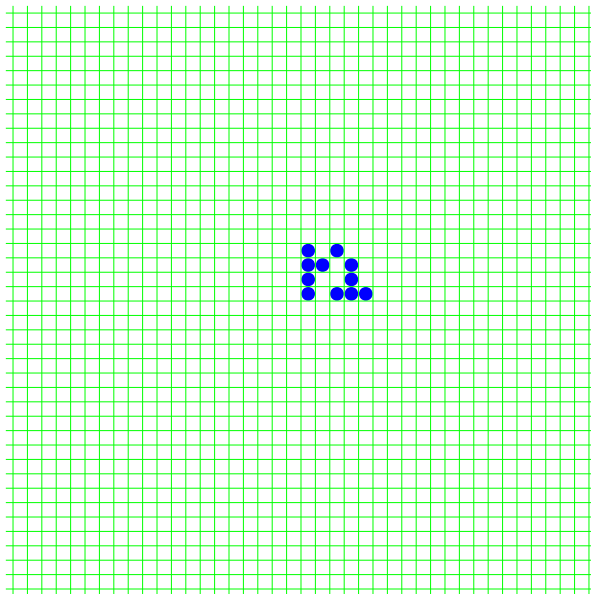
- $R(\omega_{t-k}, \dots, \omega_t) = 0$ — эволюционное отношение k -го порядка
- $\omega_t = F(\omega_{t-1}, \dots, \omega_{t-k})$ — функциональное эволюционное отношение
= уравнение детерминистической эволюции
- $\omega_t = F(\omega_{t-1})$ — эволюционное уравнение 1-го порядка

При наличии симметрий из функциональности следует

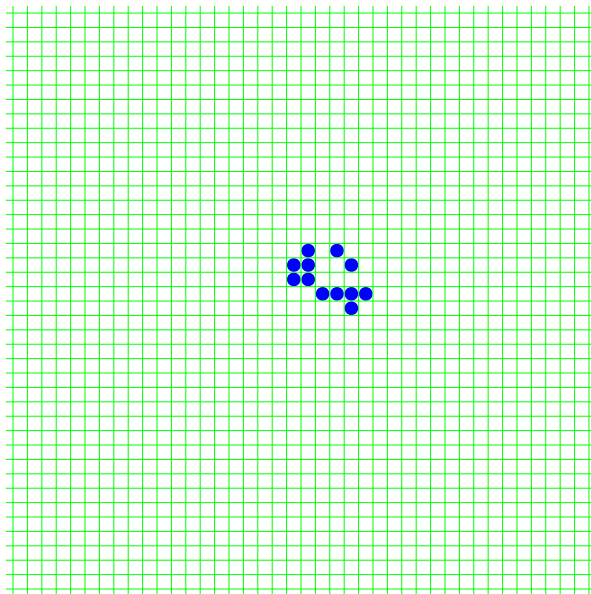
- динамические траектории проходят групповые орбиты
в порядке невозрастания размеров орбит
(периодические траектории лежат в орбитах одного размера)
- при конечном числе орбит неизбежно возникают
солитоноподобные структуры

Любые дискретные детерминистические системы в процессе эволюции становятся физически неотличимыми от обратимых
— возможное объяснение наблюдаемой в фундаментальных законах обратимости и унитарности

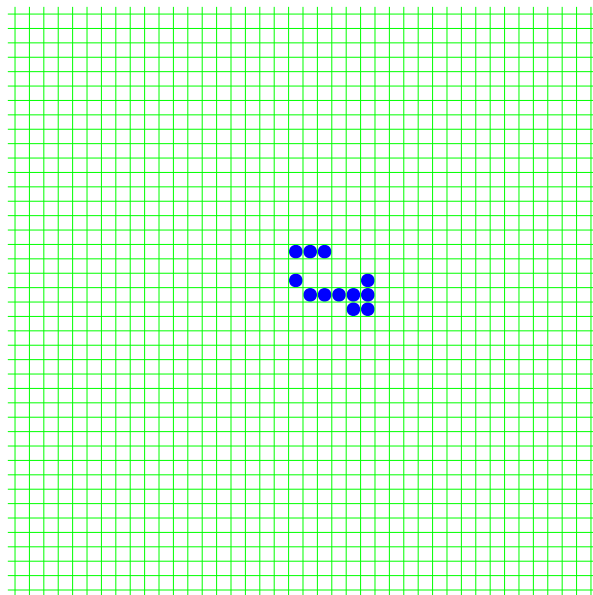
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



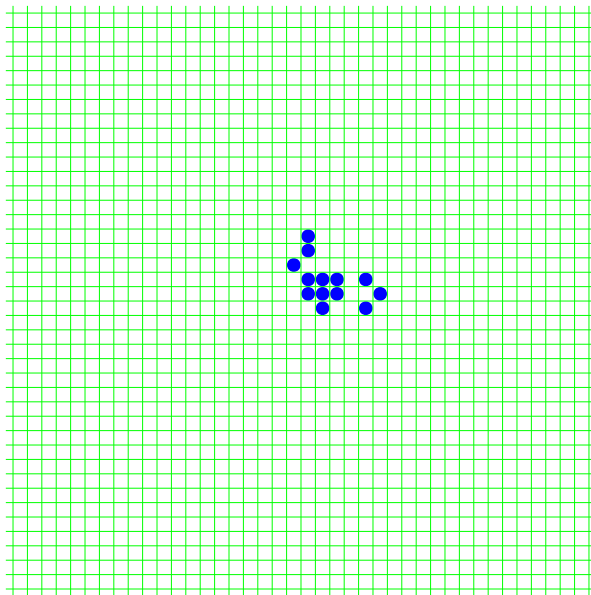
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



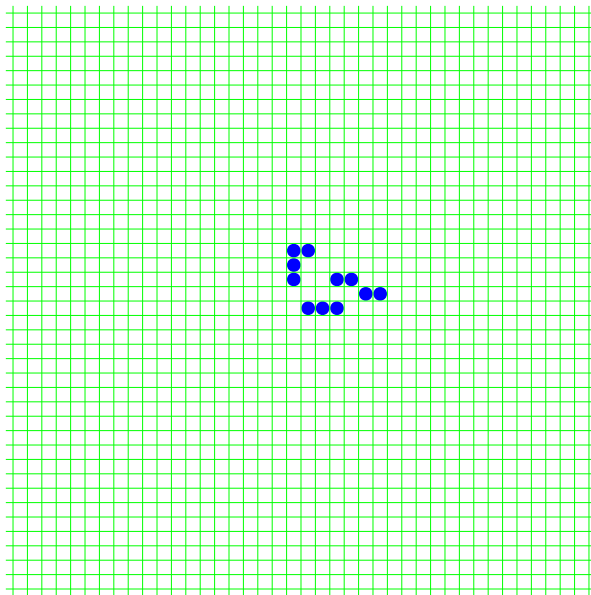
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



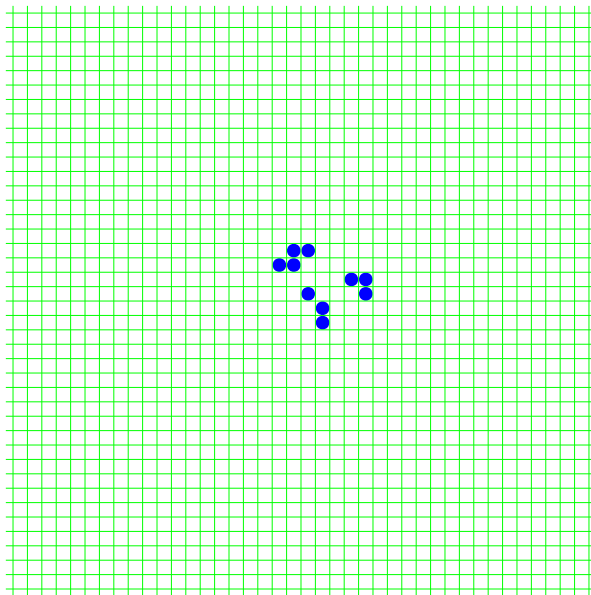
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



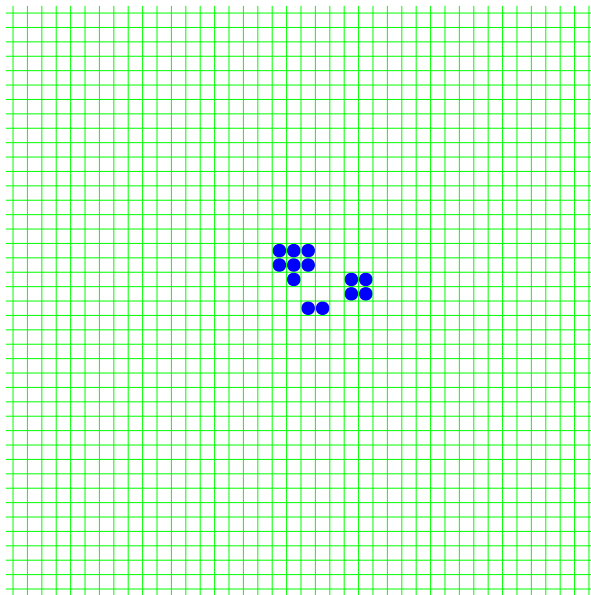
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



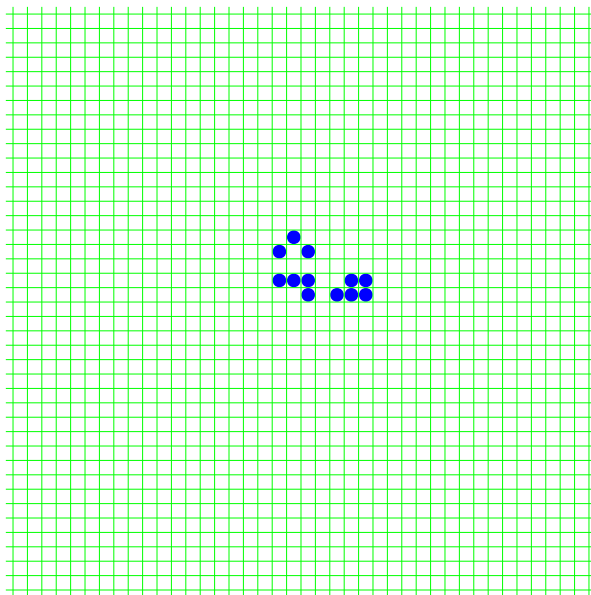
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



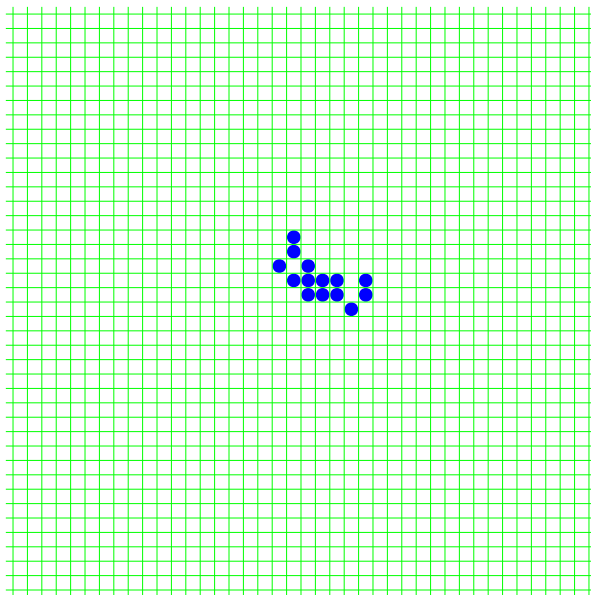
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



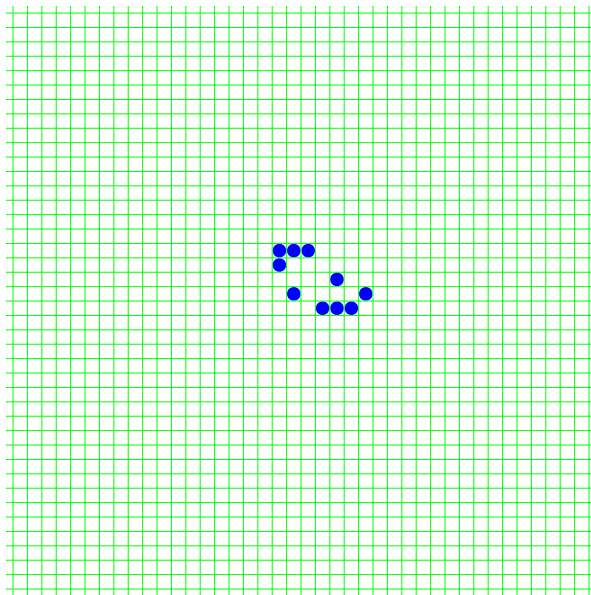
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



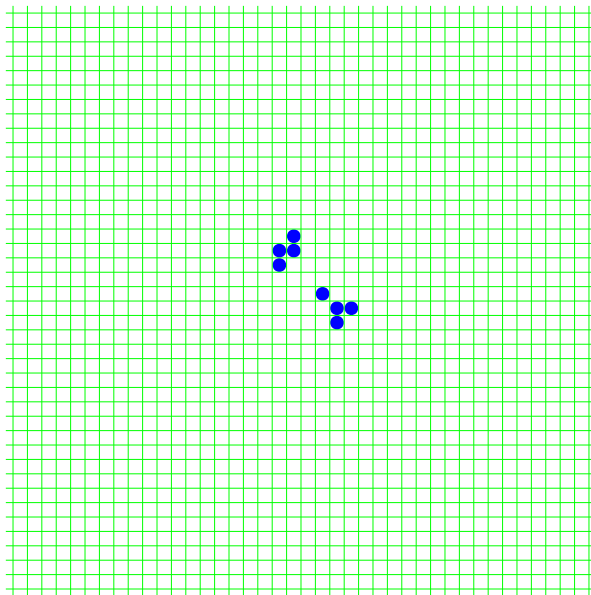
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



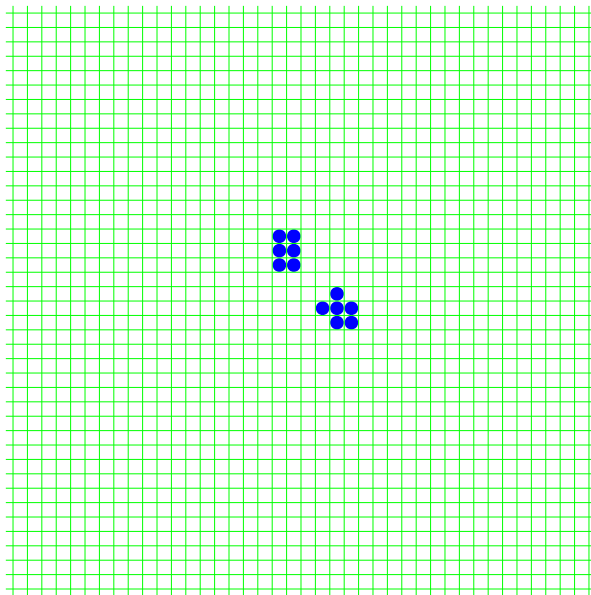
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



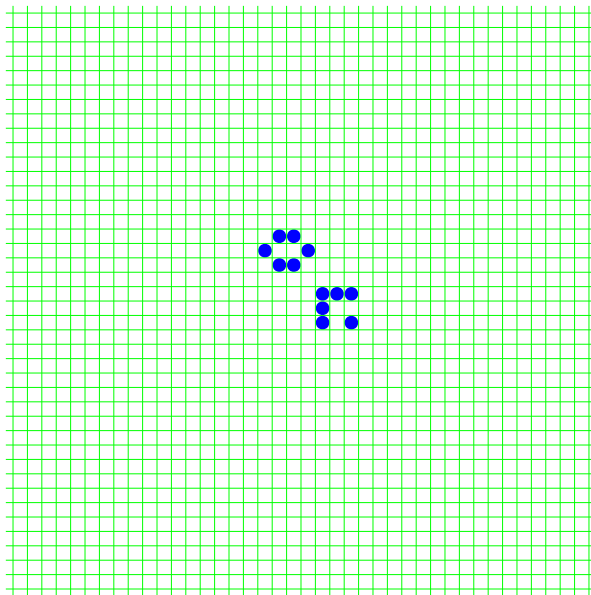
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



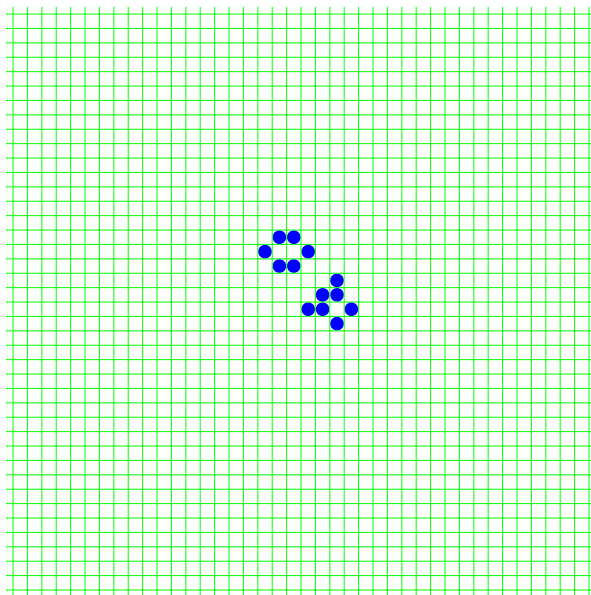
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



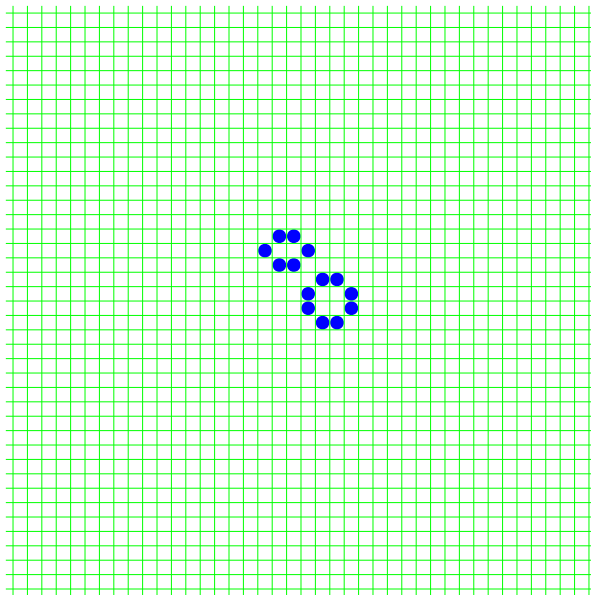
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



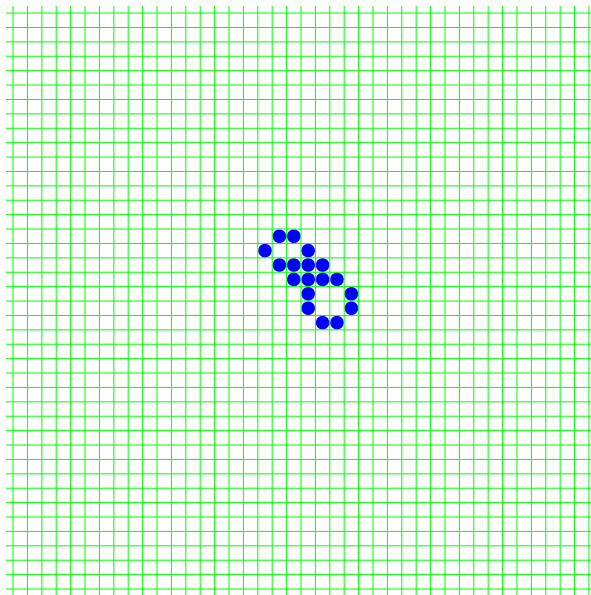
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



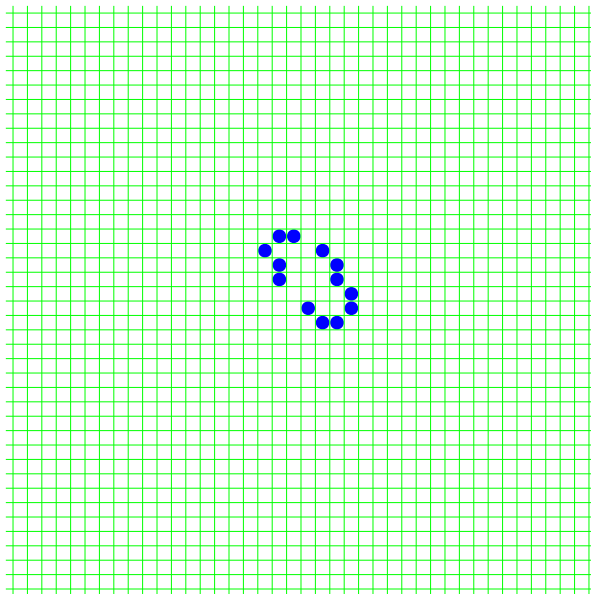
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



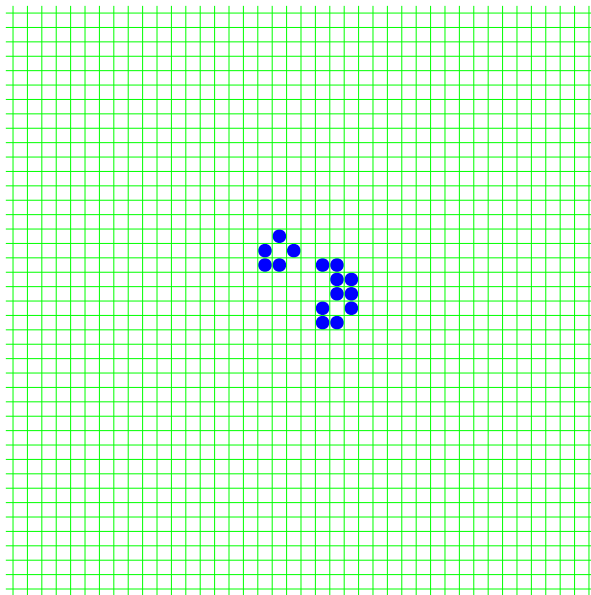
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



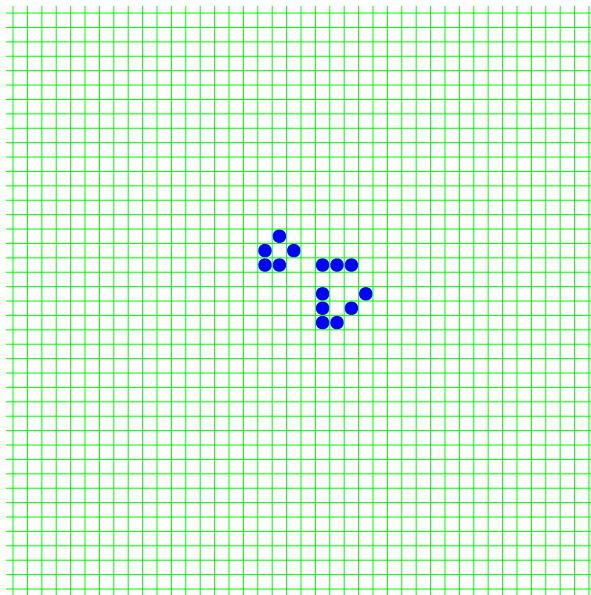
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



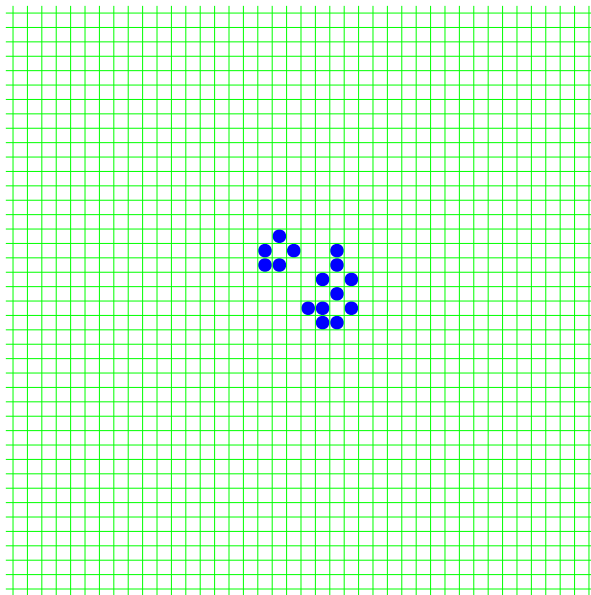
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



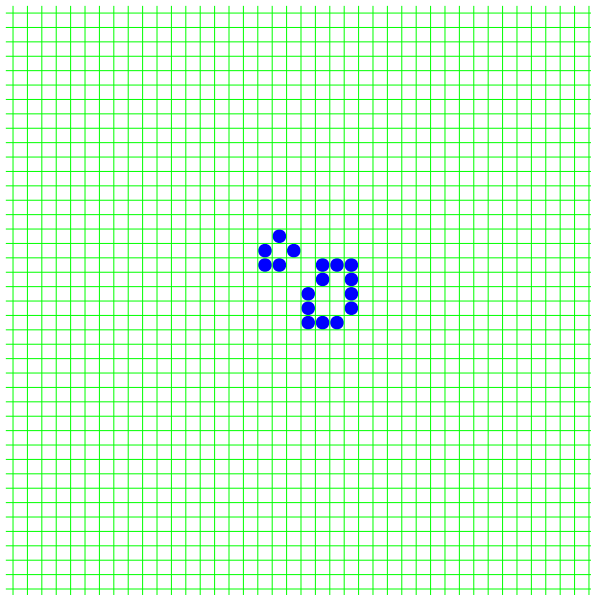
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



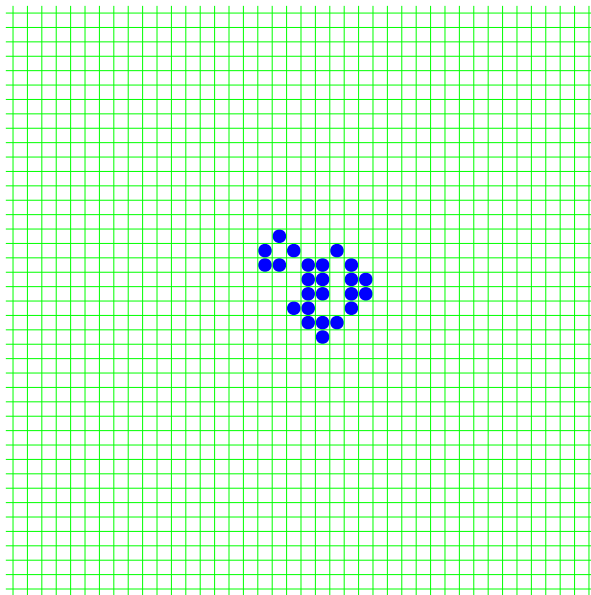
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



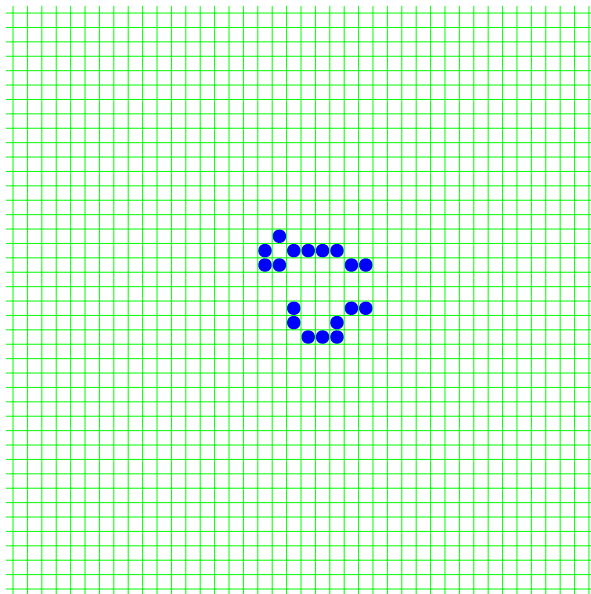
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



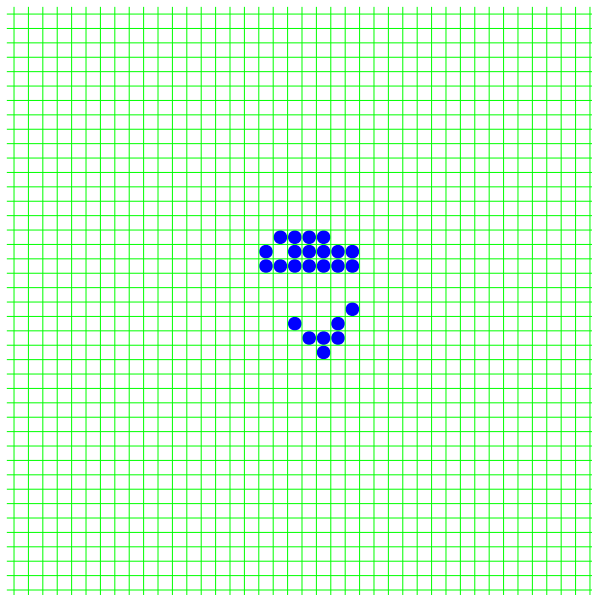
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



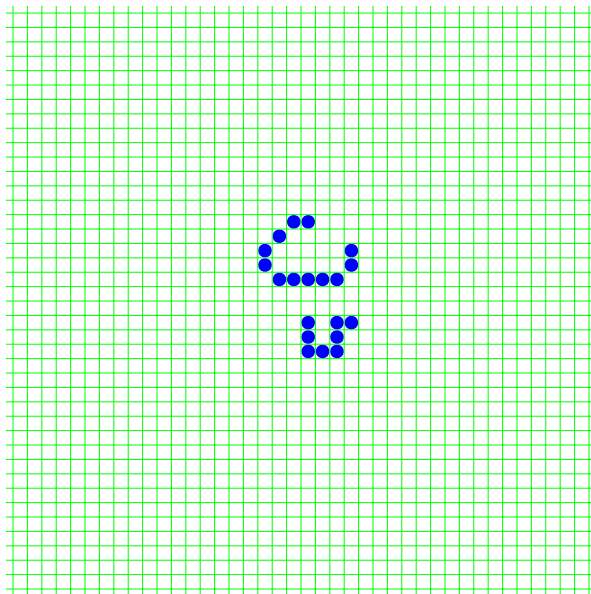
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



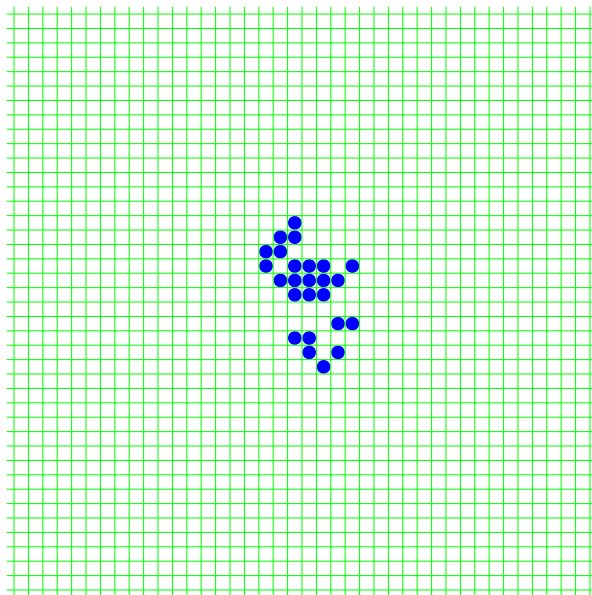
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



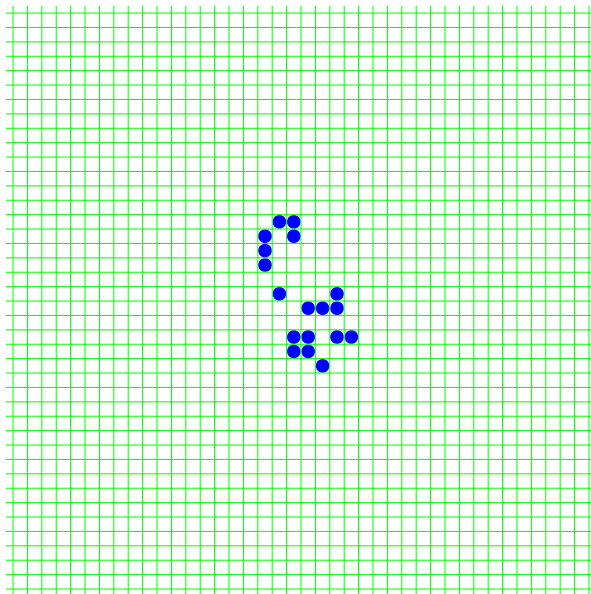
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



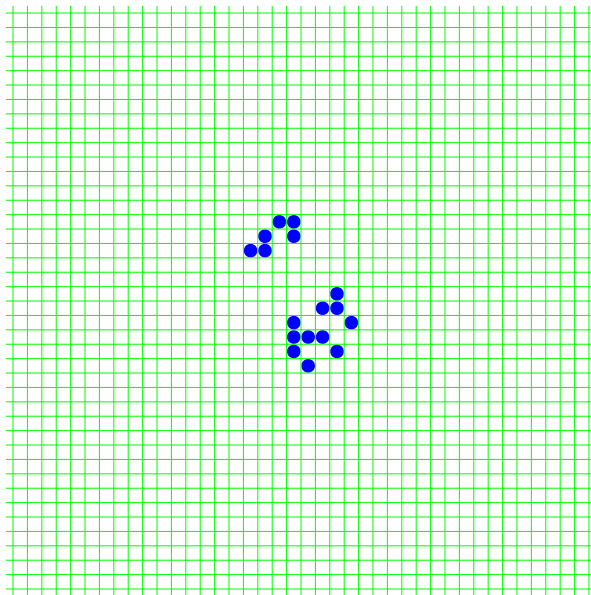
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



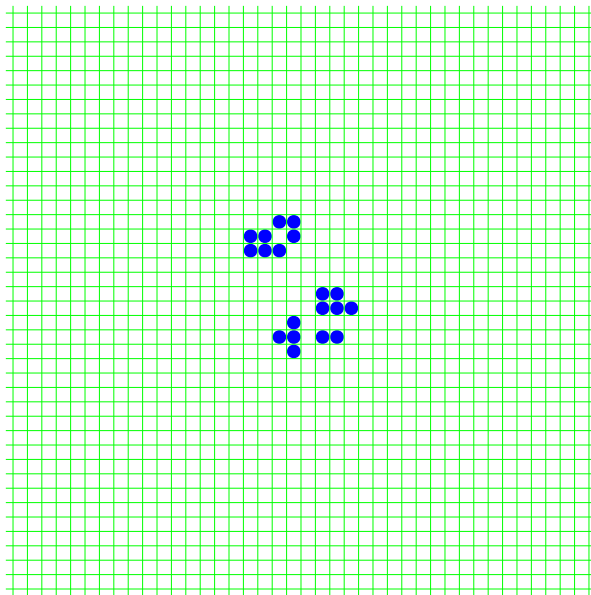
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



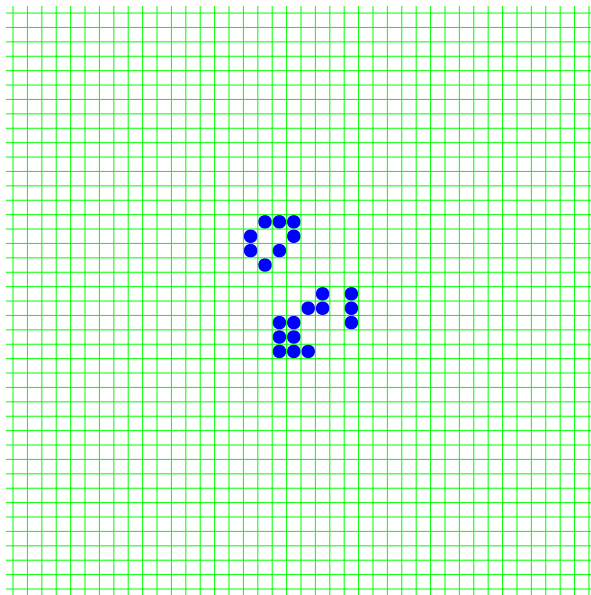
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



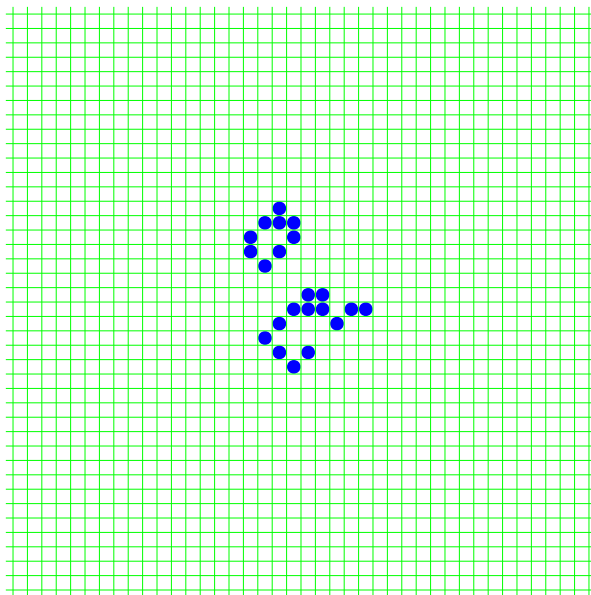
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



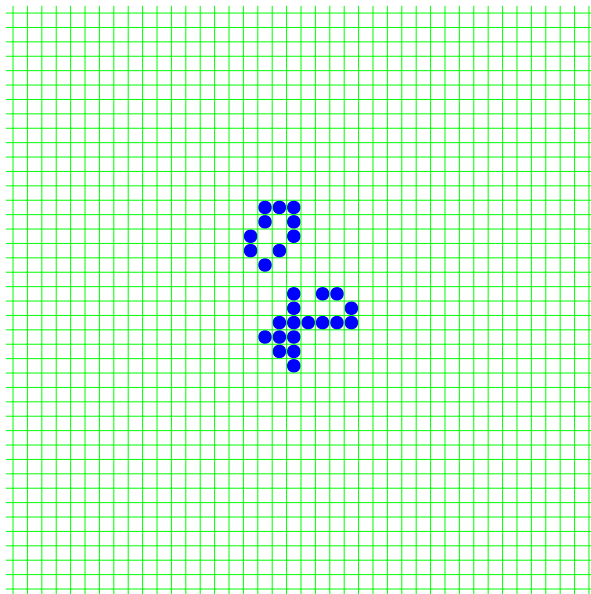
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



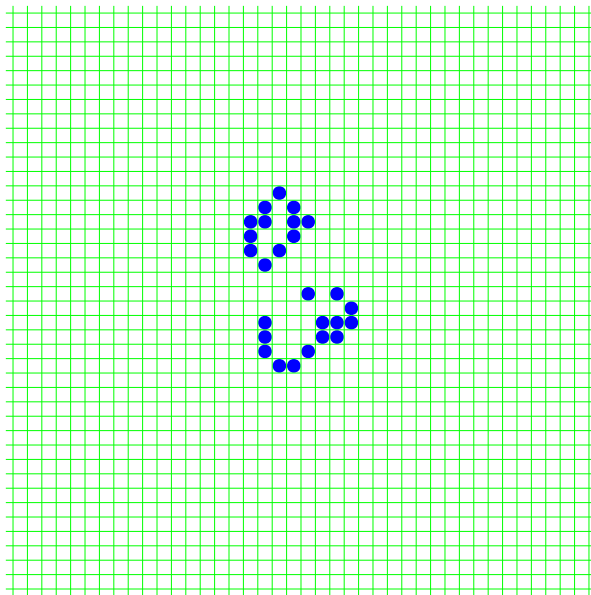
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



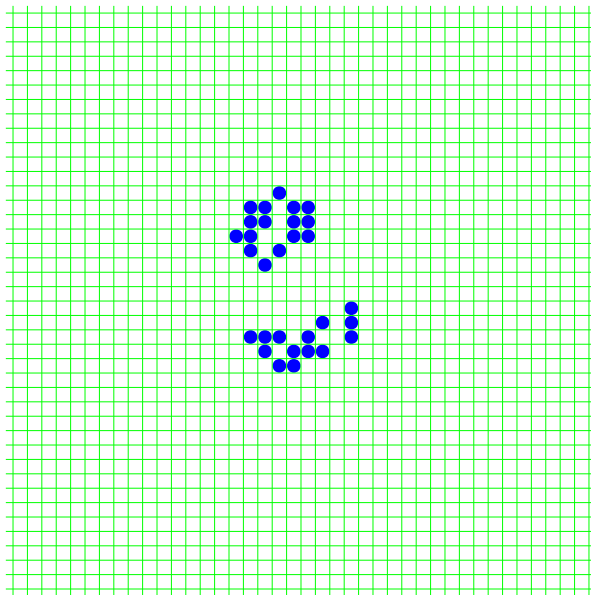
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



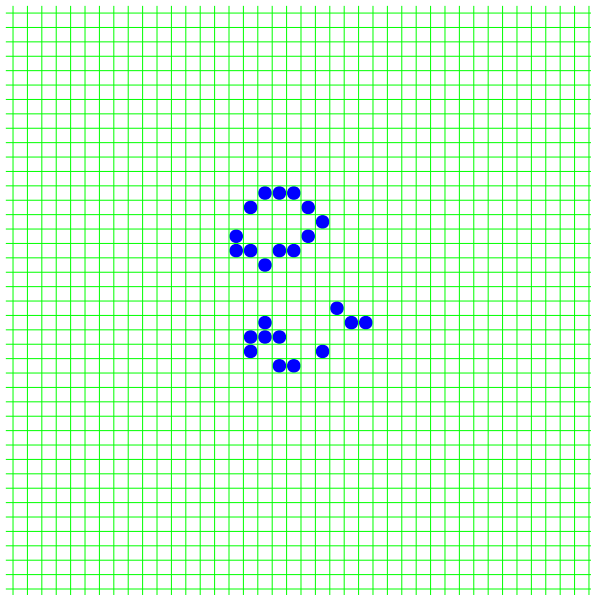
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



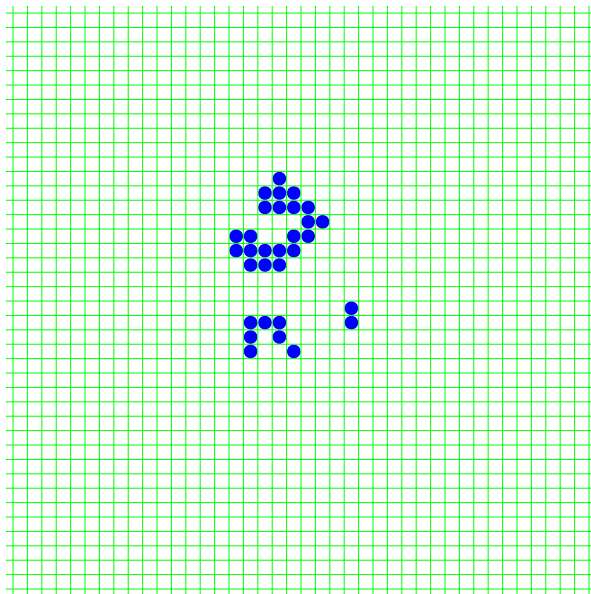
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



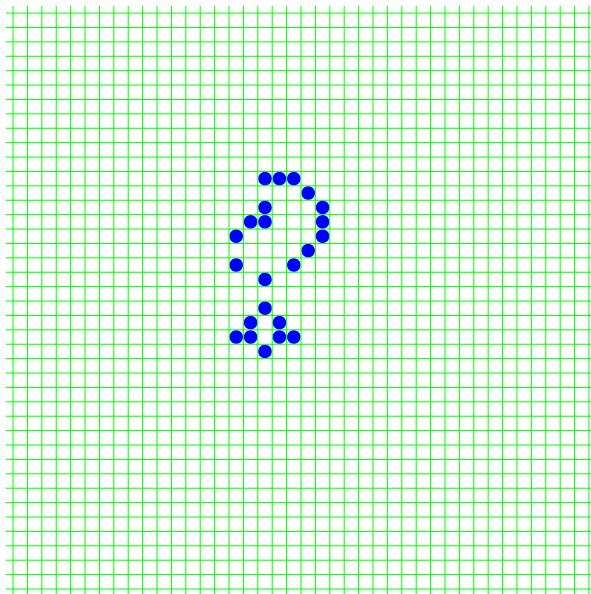
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



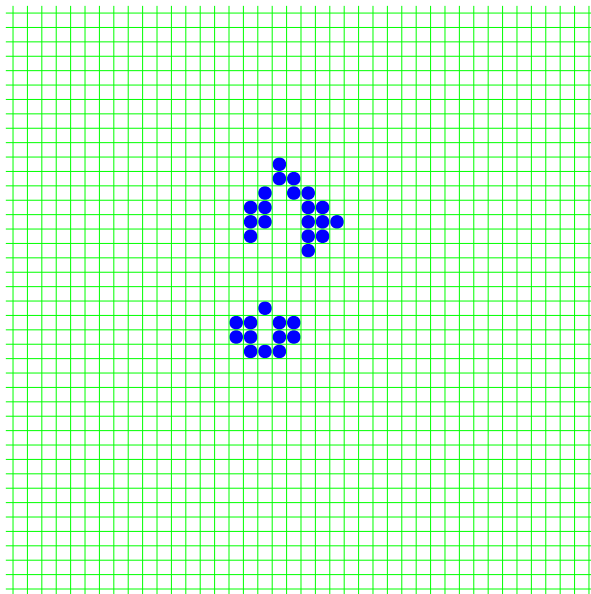
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



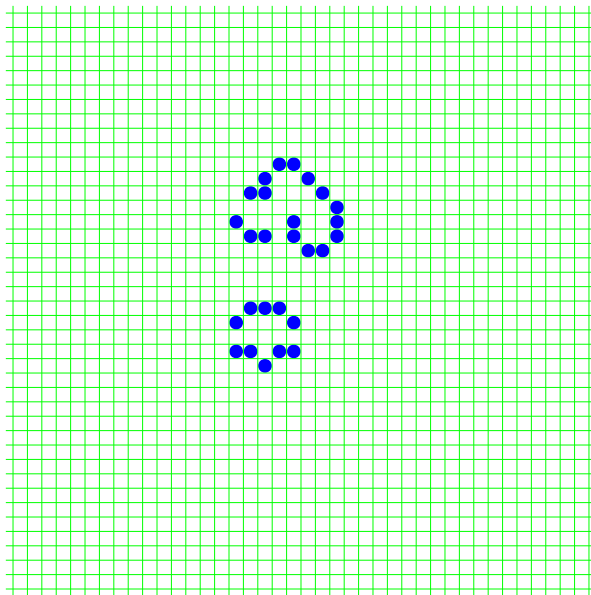
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



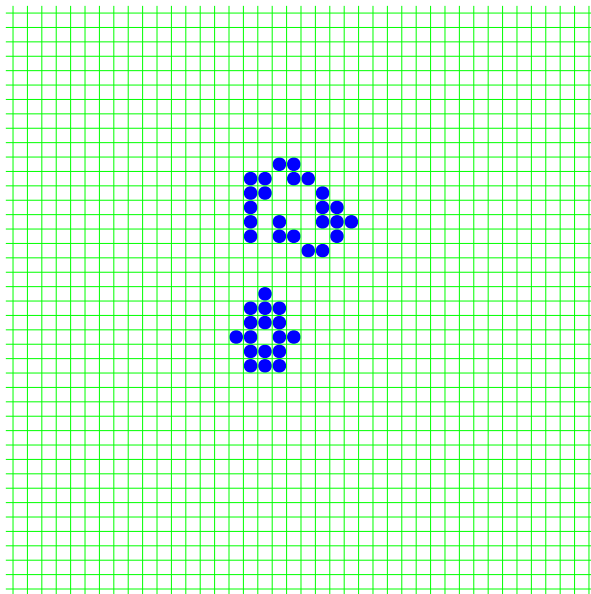
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



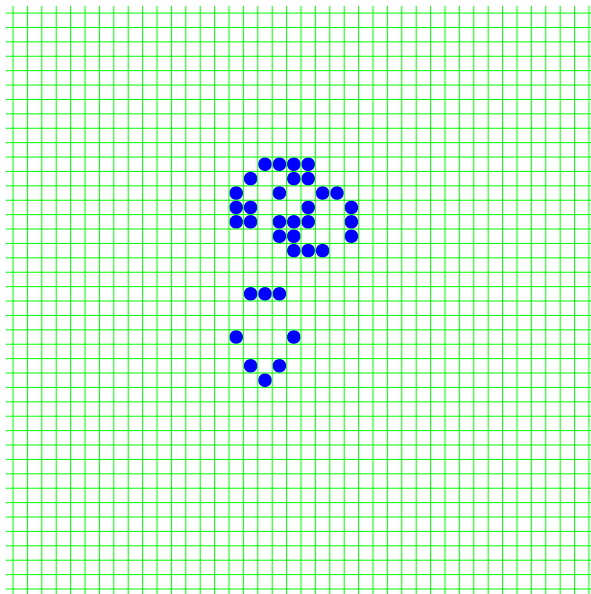
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



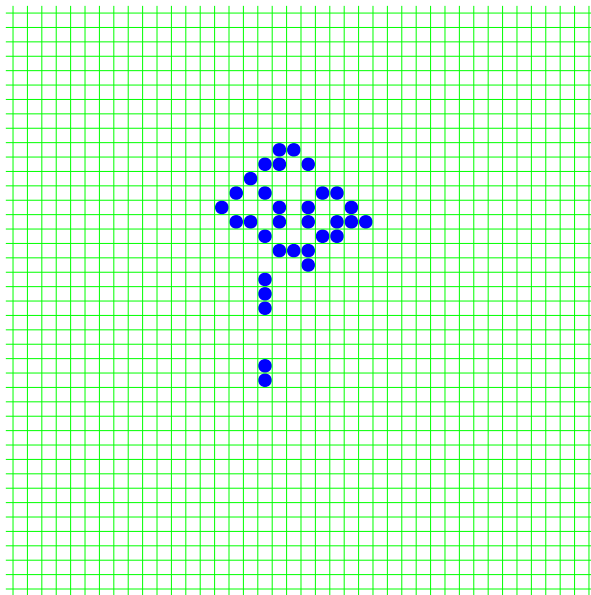
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



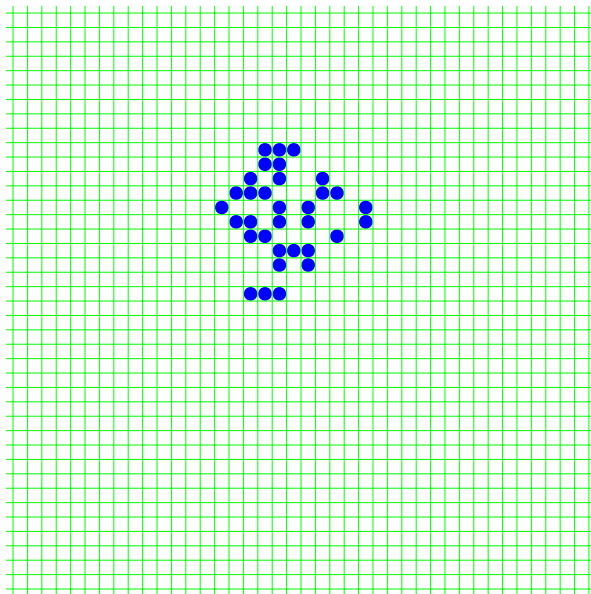
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



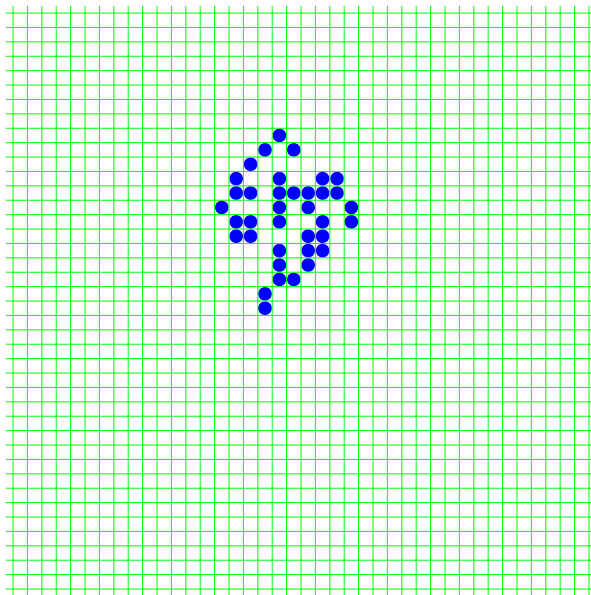
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



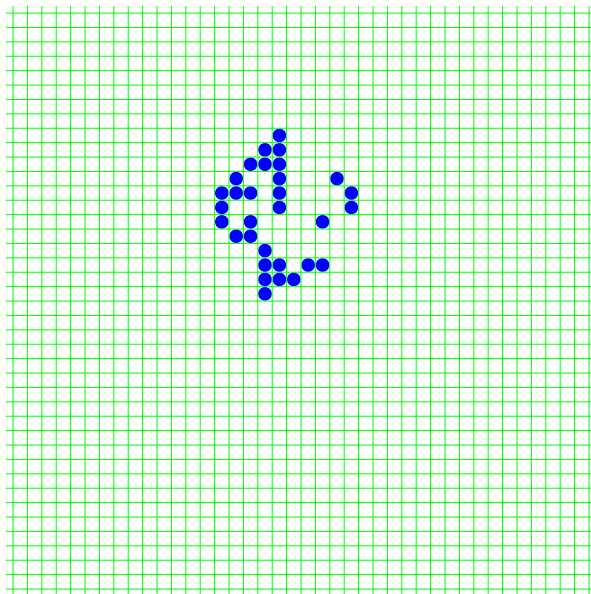
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



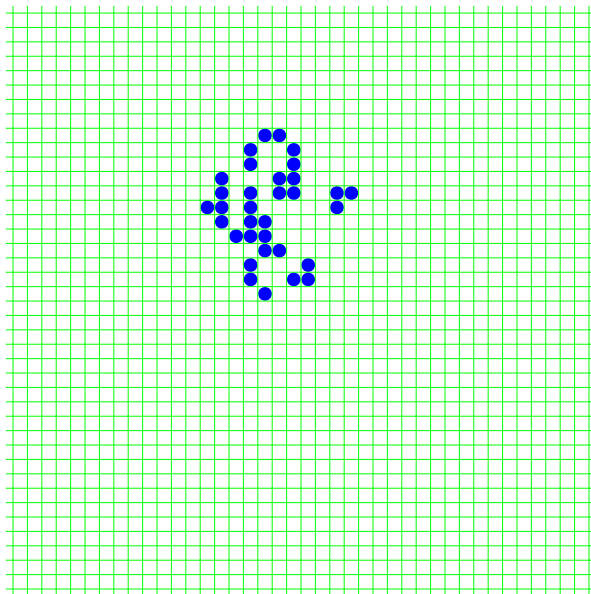
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



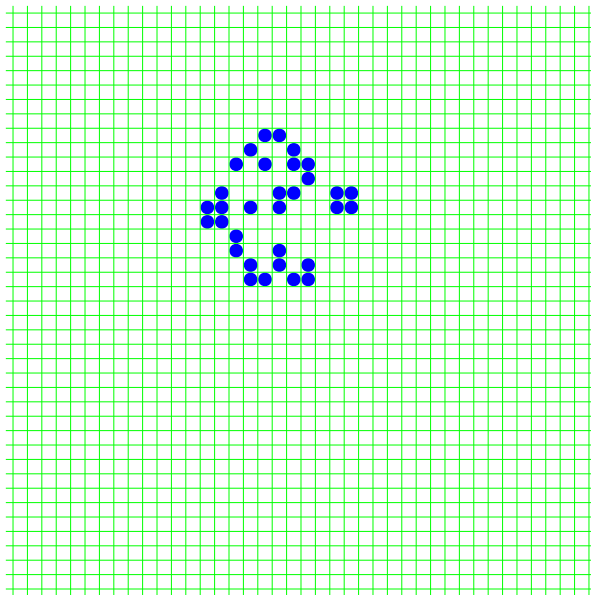
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



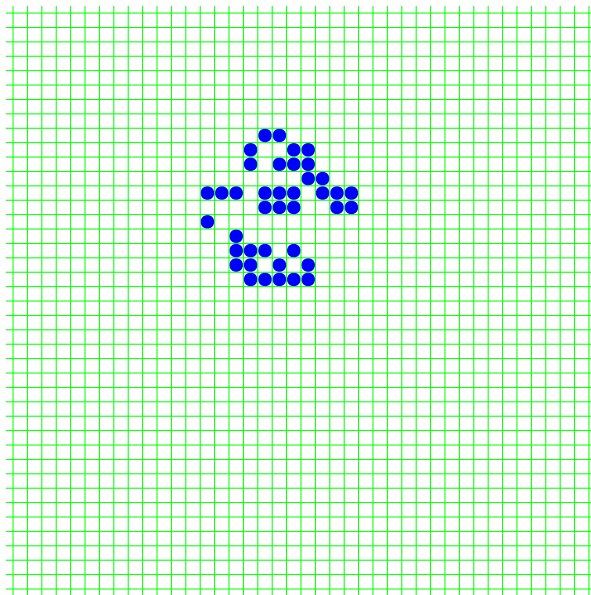
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



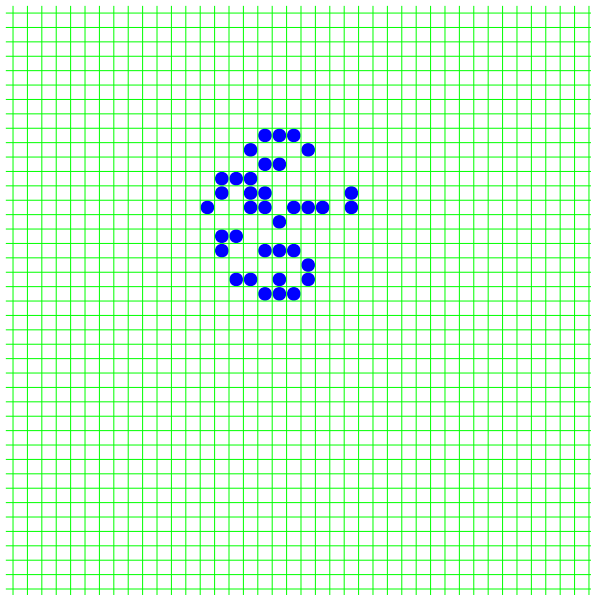
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



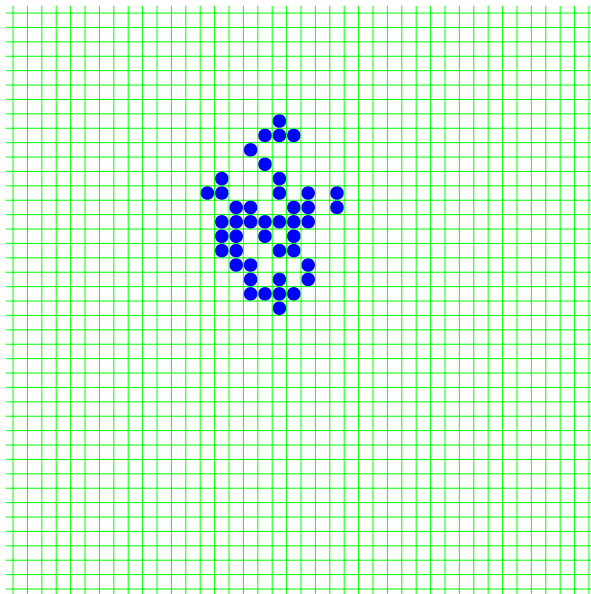
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



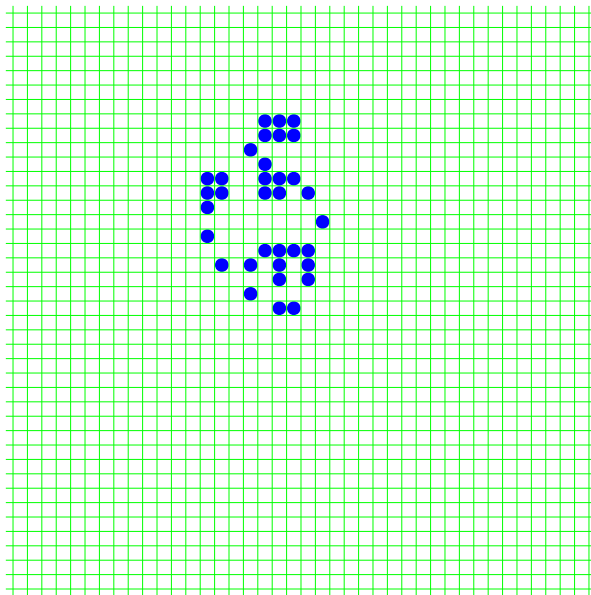
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



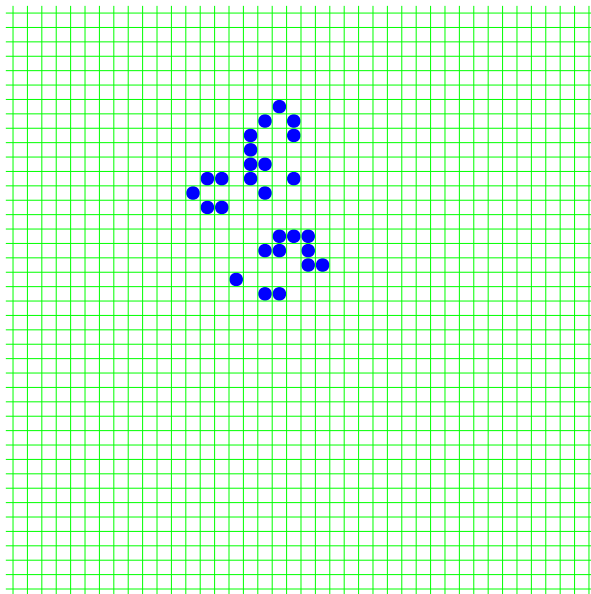
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



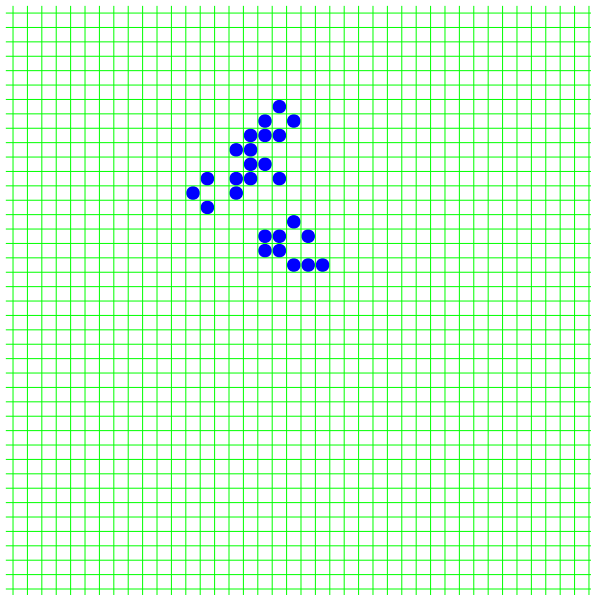
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



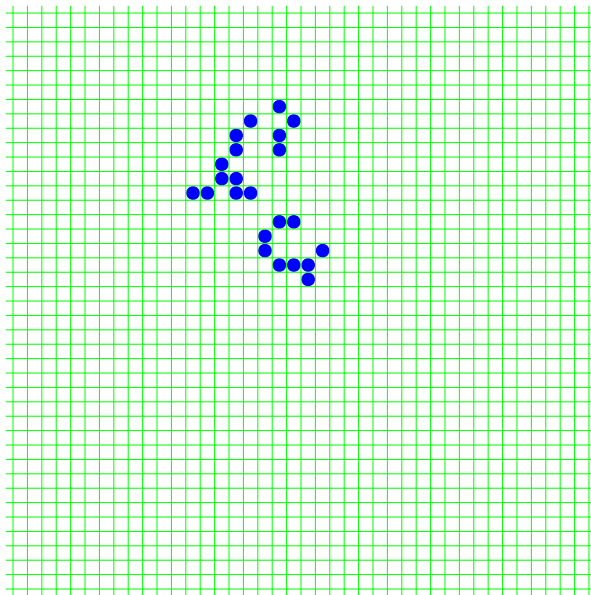
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



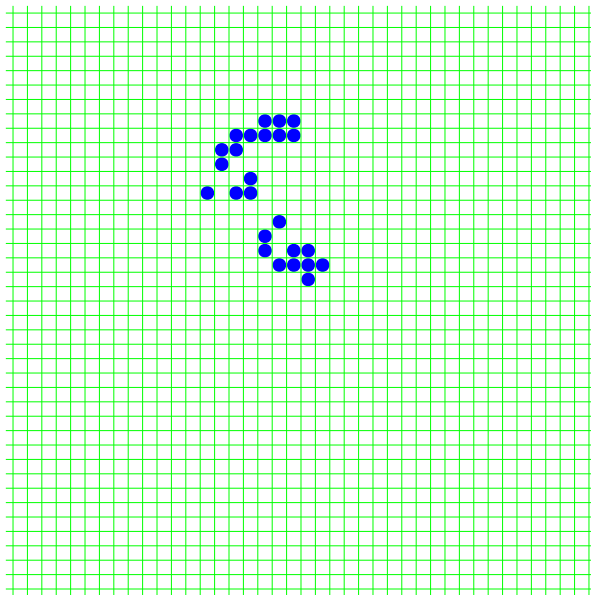
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



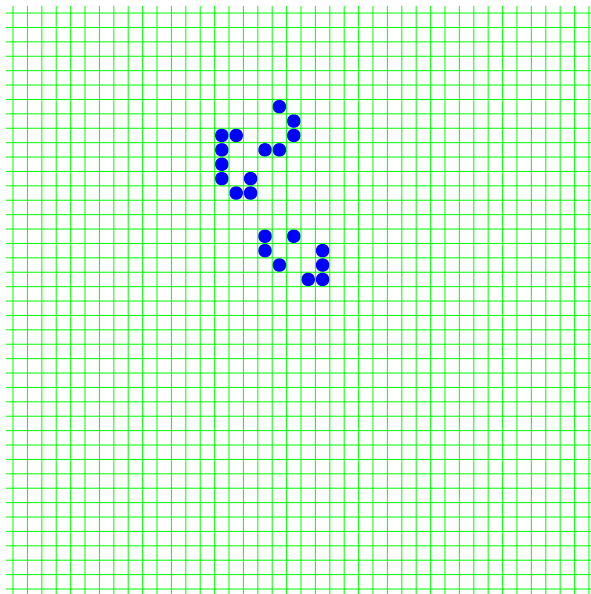
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



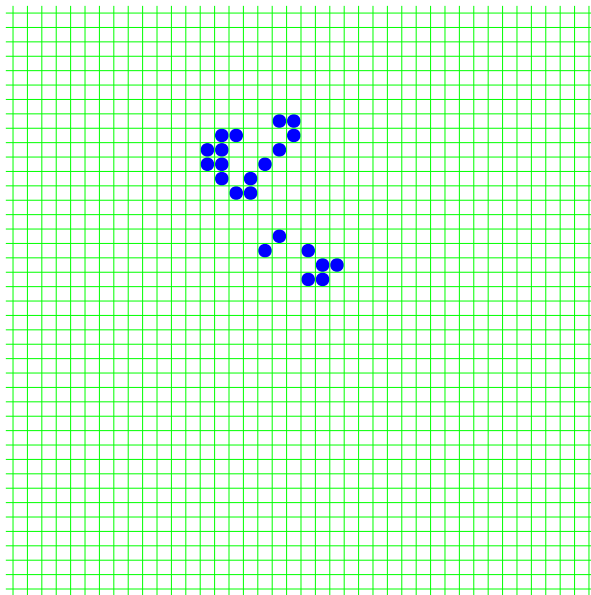
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



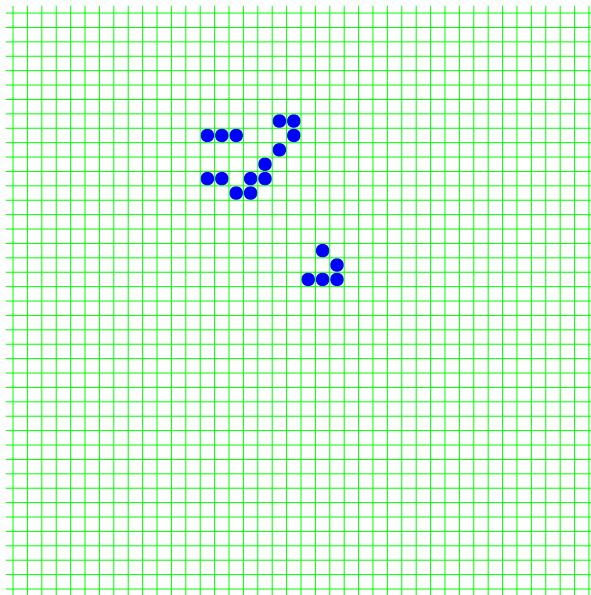
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



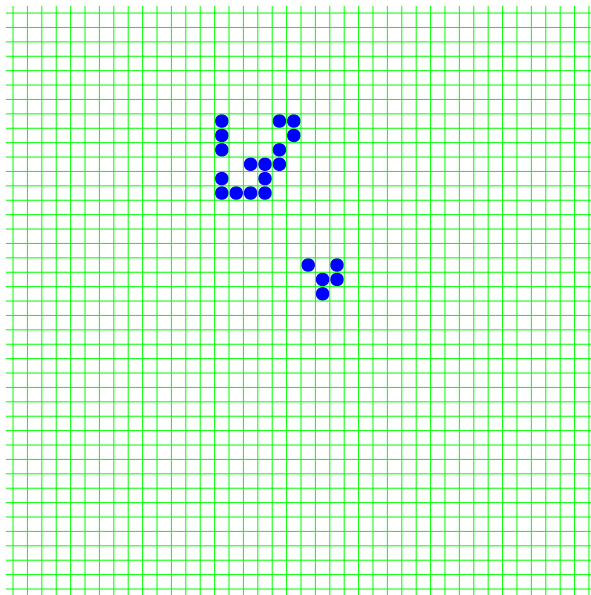
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



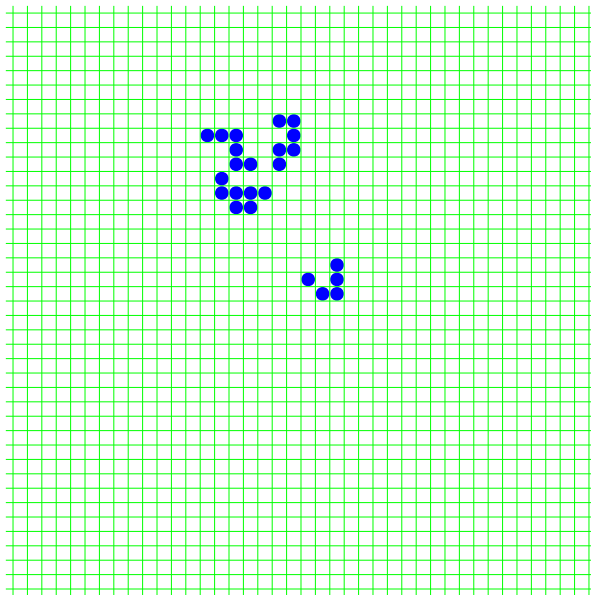
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



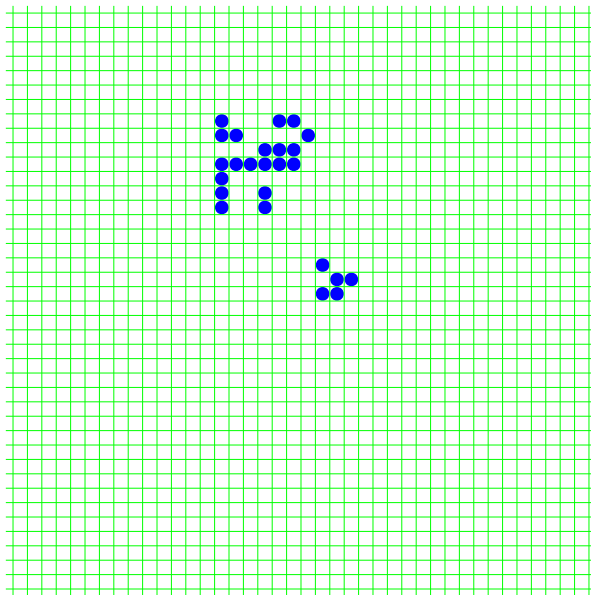
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



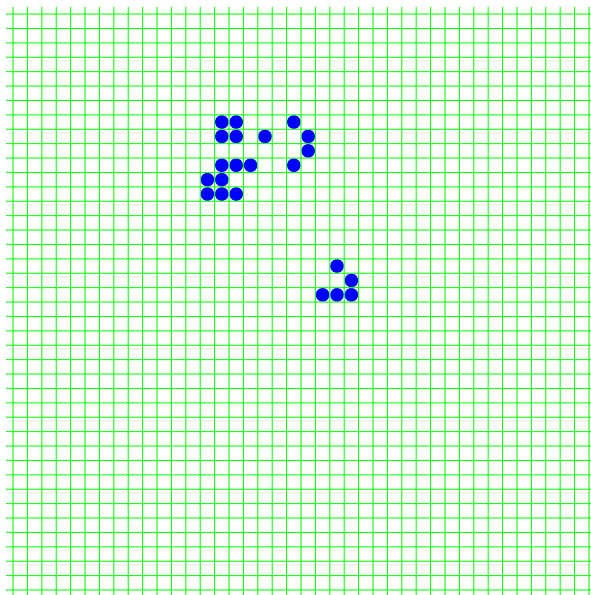
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



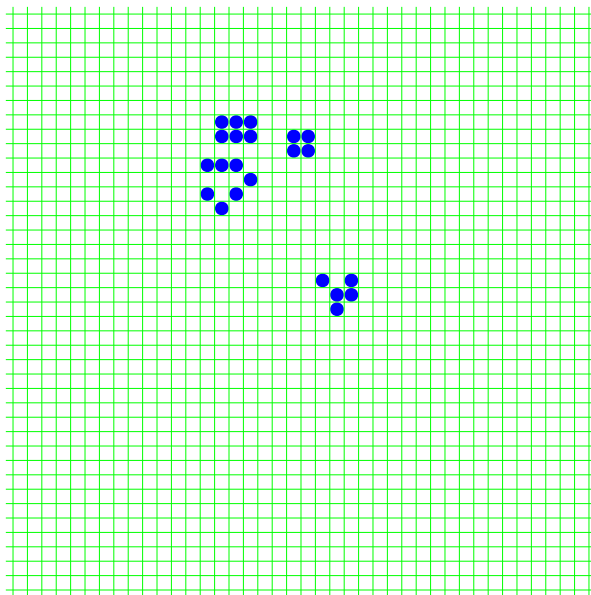
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



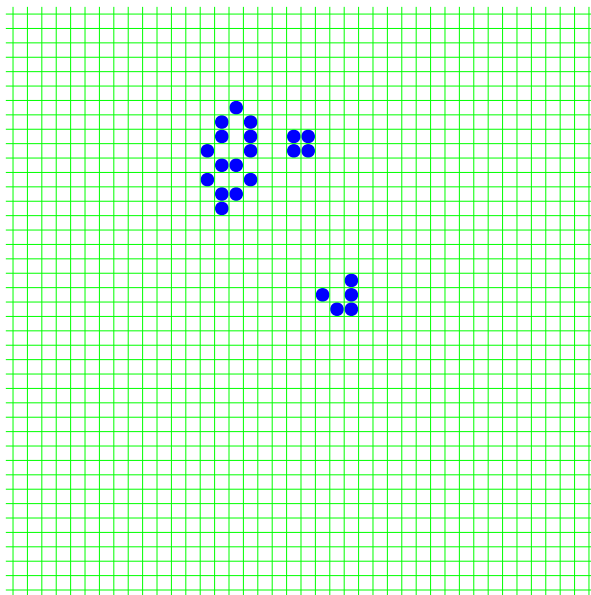
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



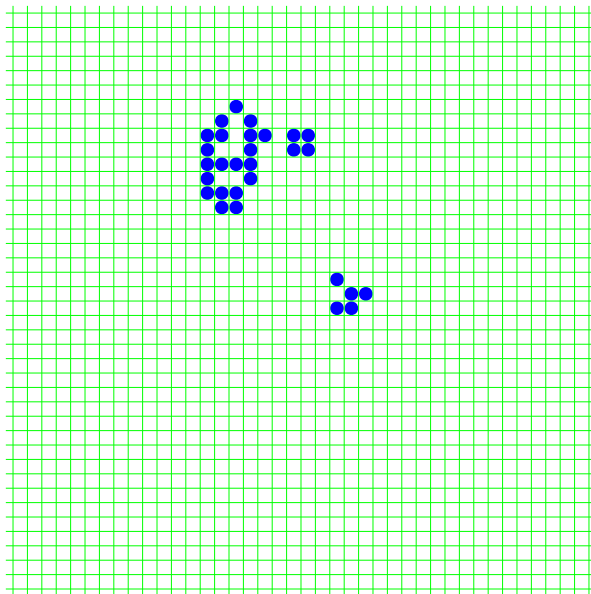
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



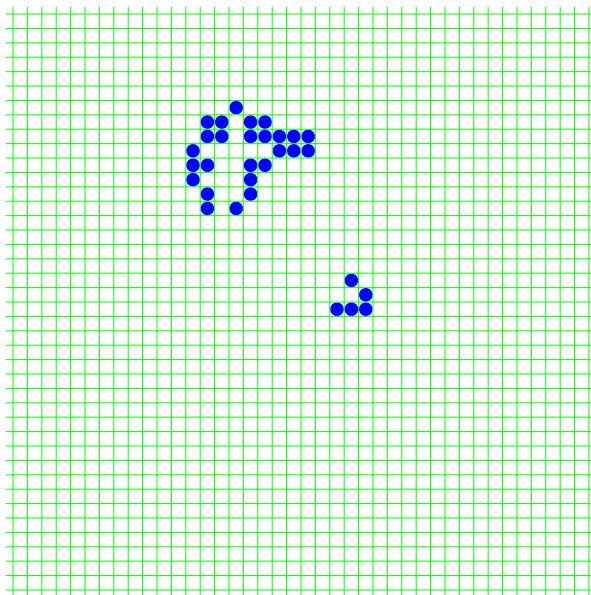
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



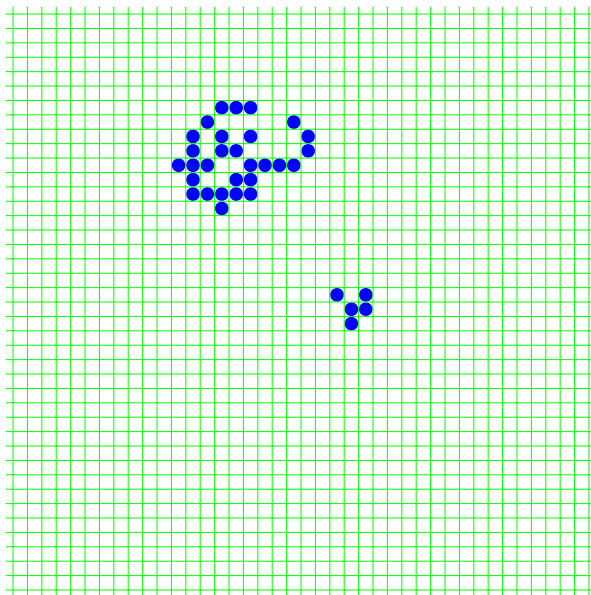
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



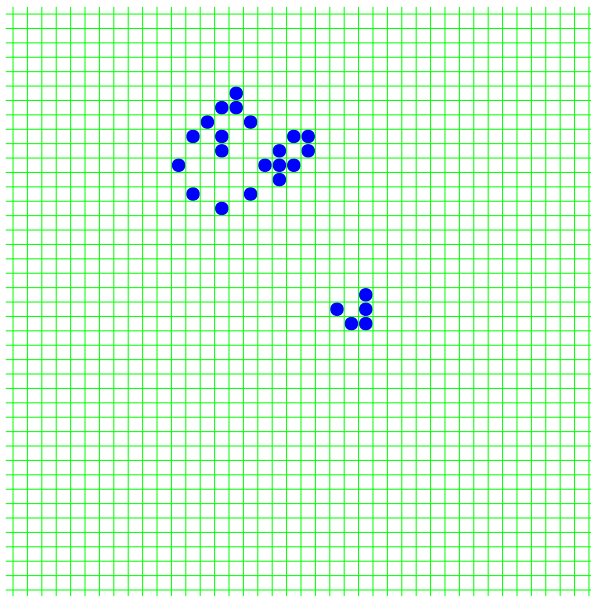
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



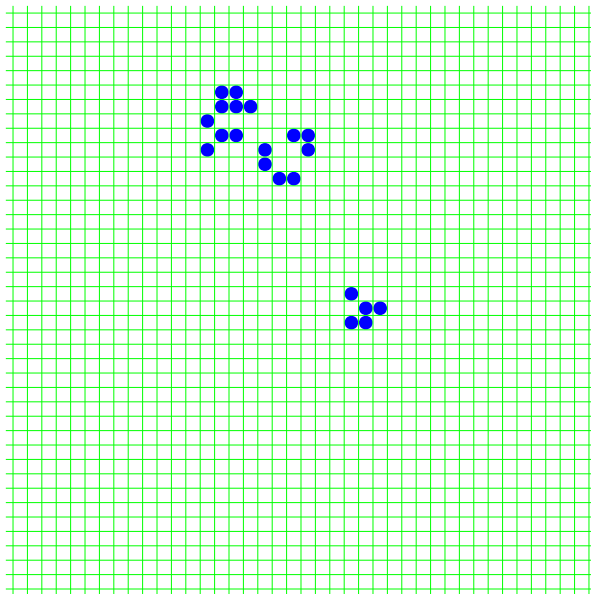
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



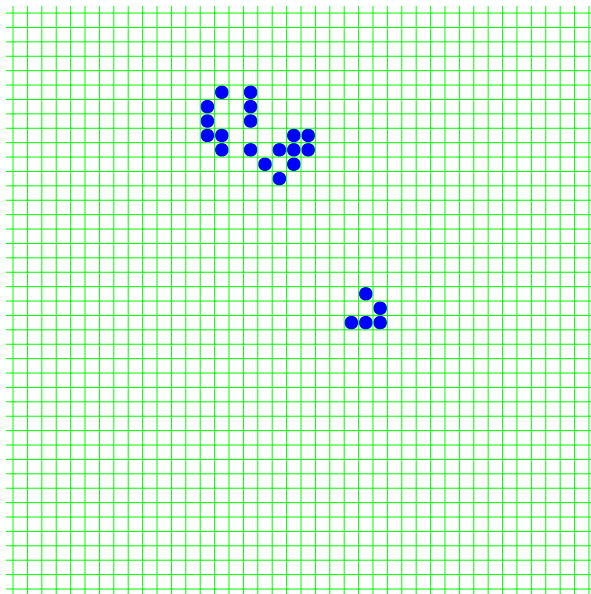
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



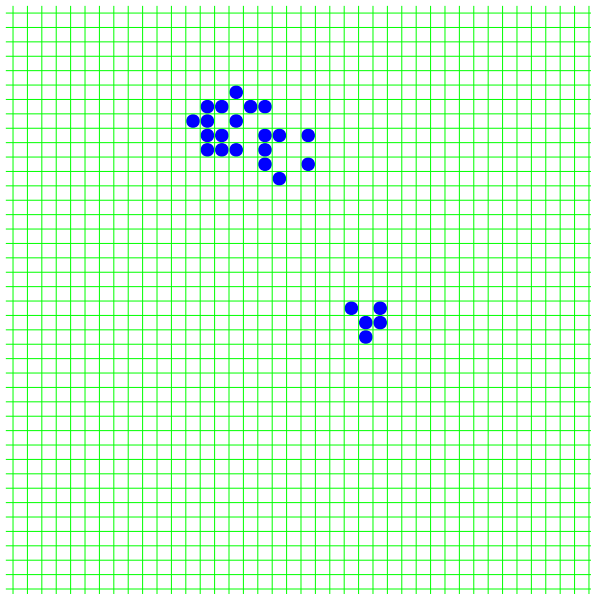
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



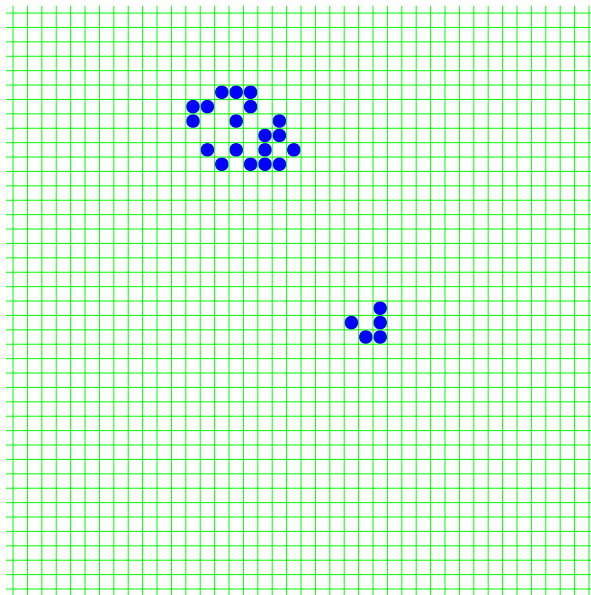
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



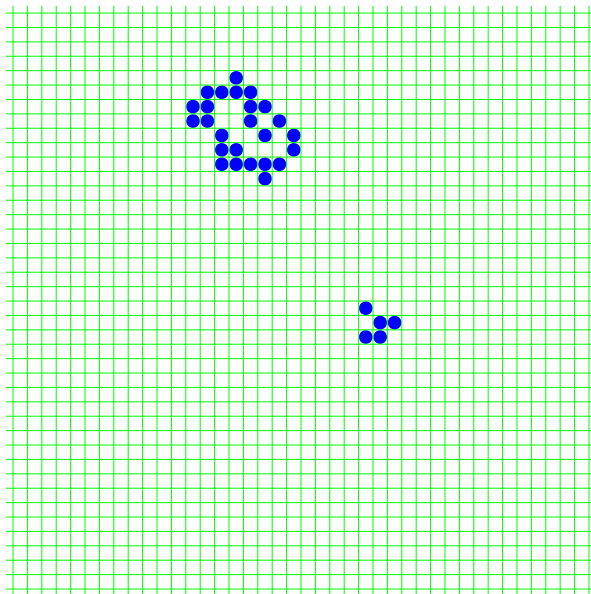
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



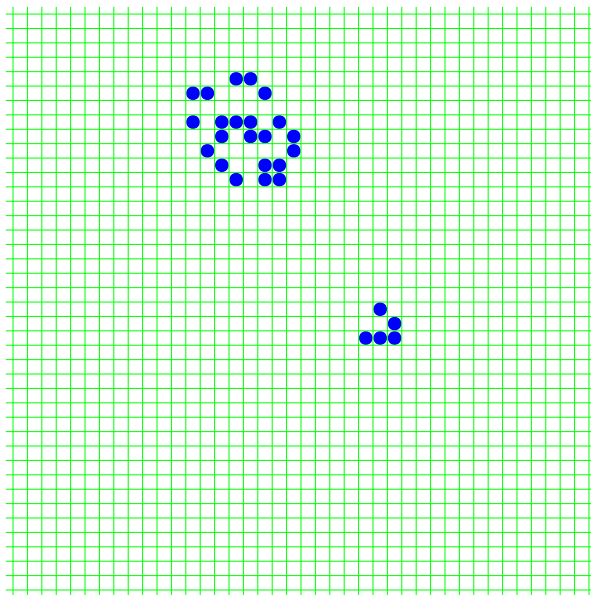
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



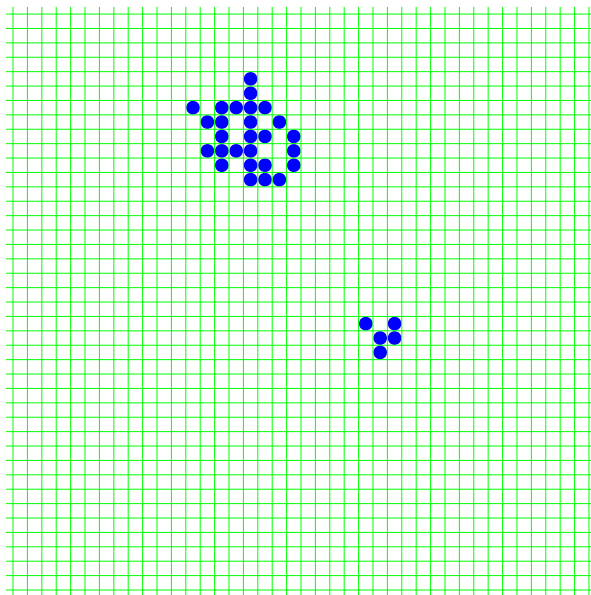
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



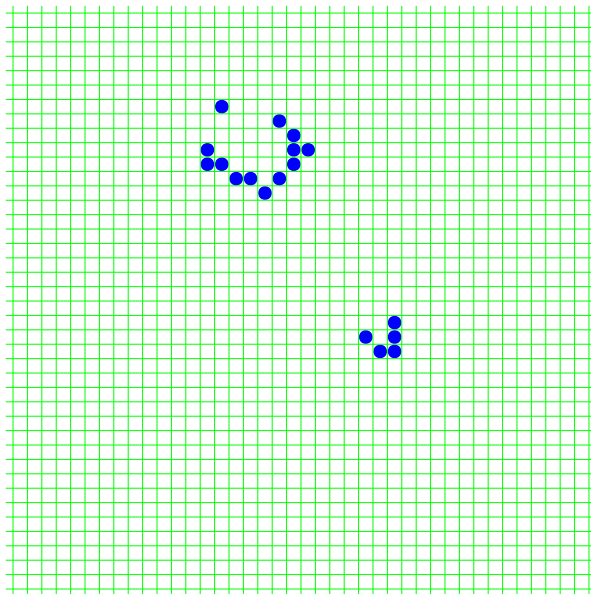
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



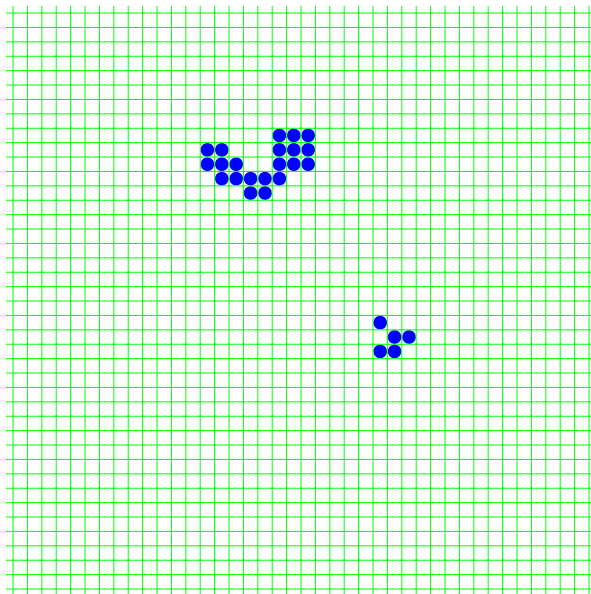
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



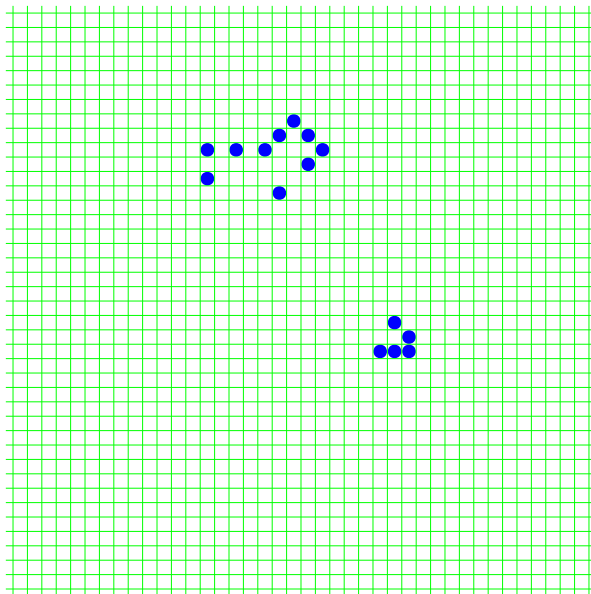
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



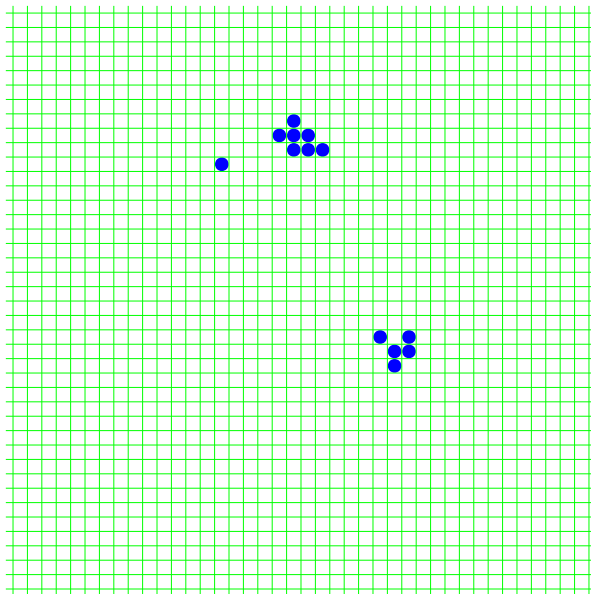
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



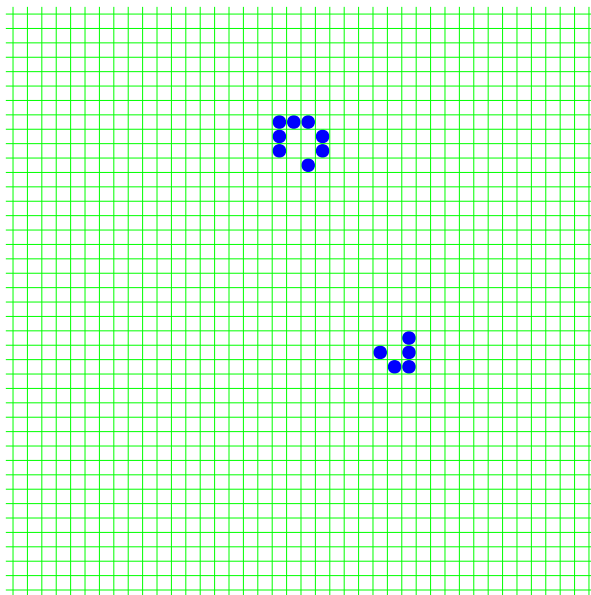
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



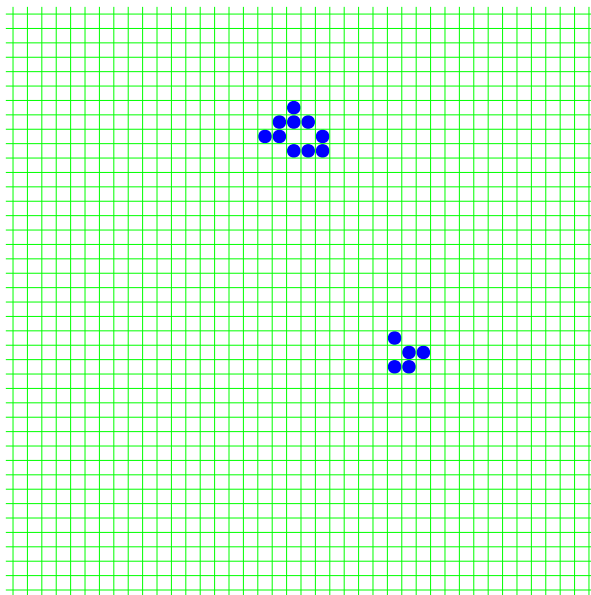
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



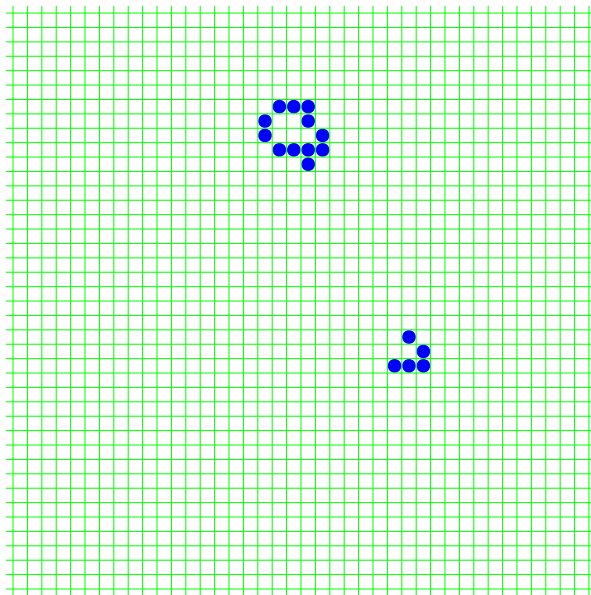
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



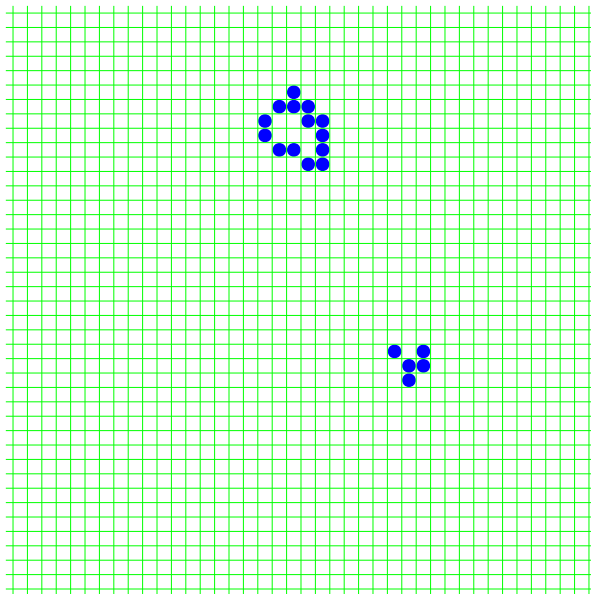
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



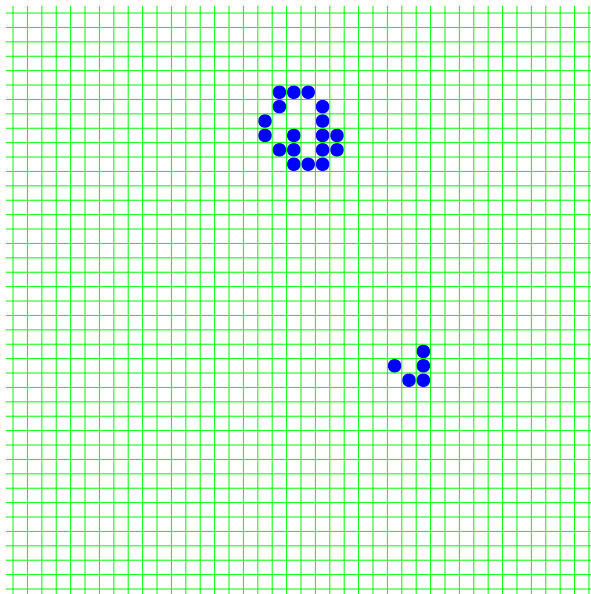
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



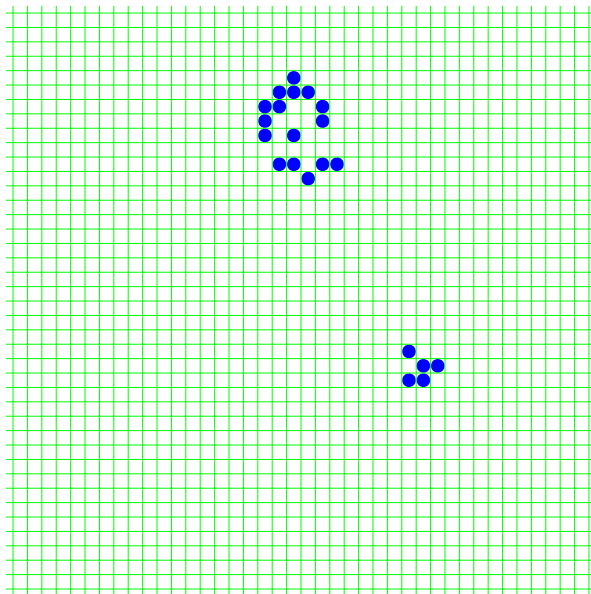
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



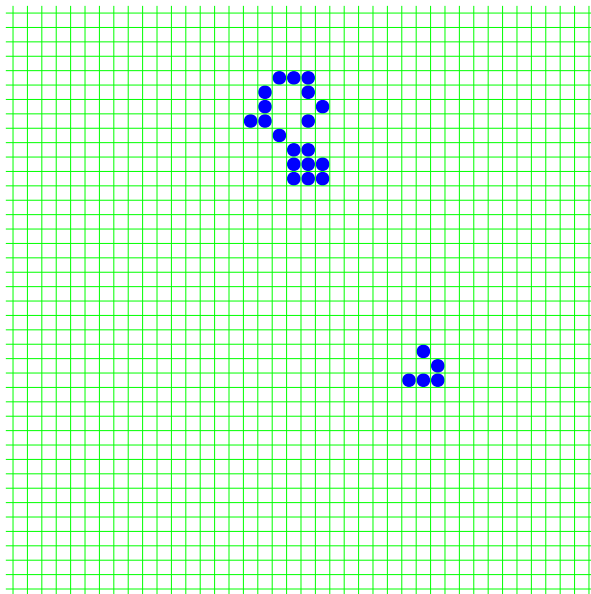
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



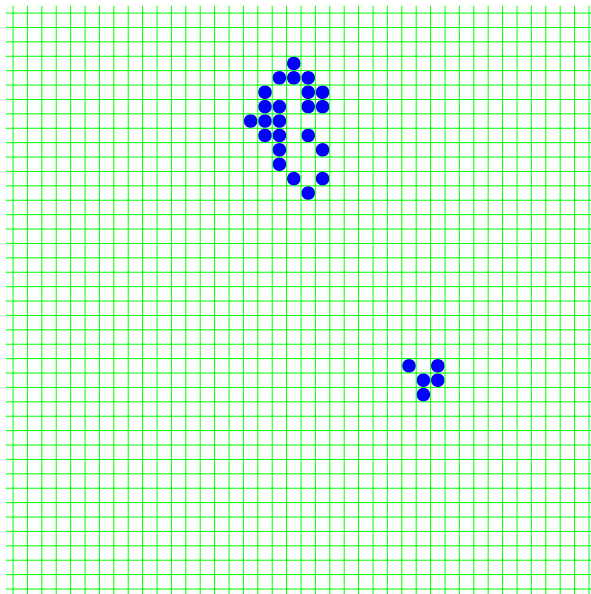
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



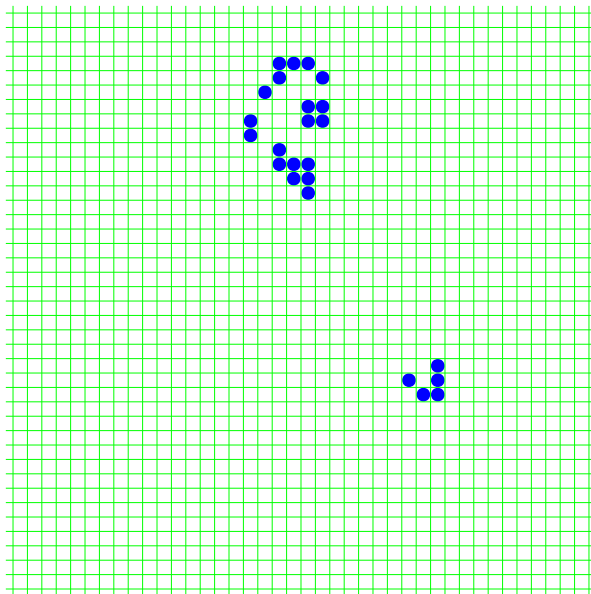
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



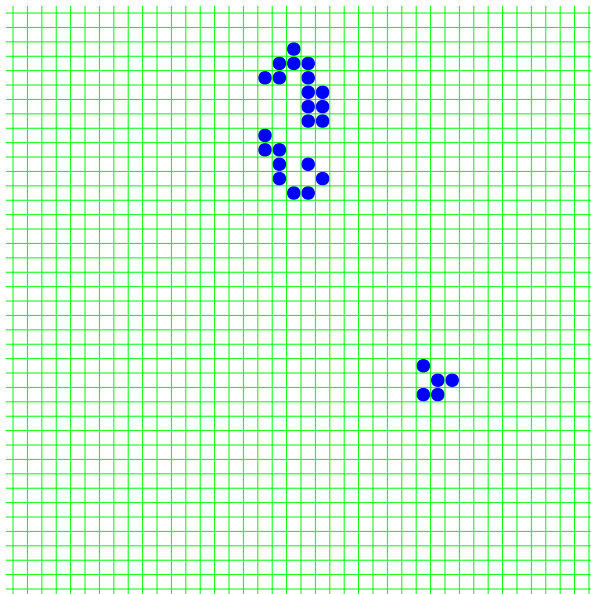
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



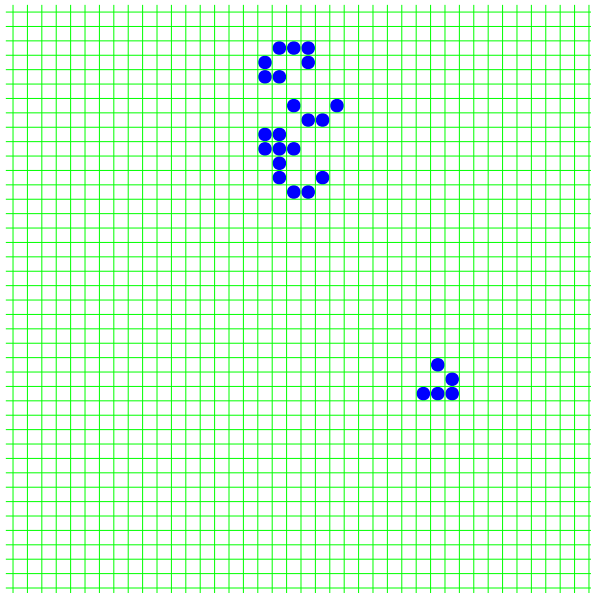
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



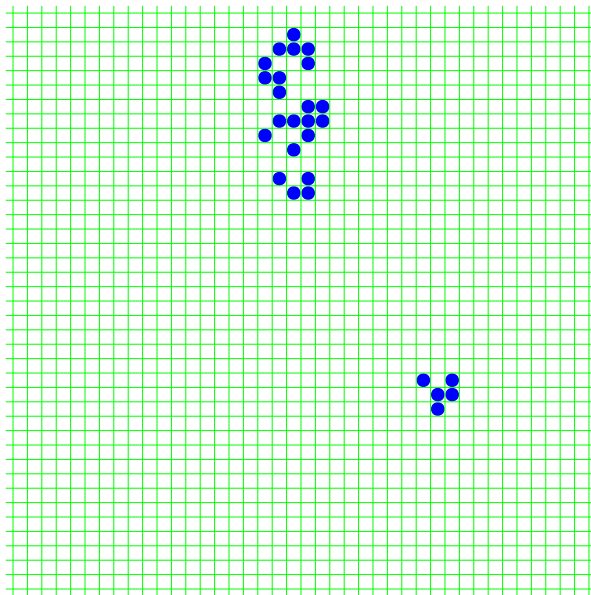
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



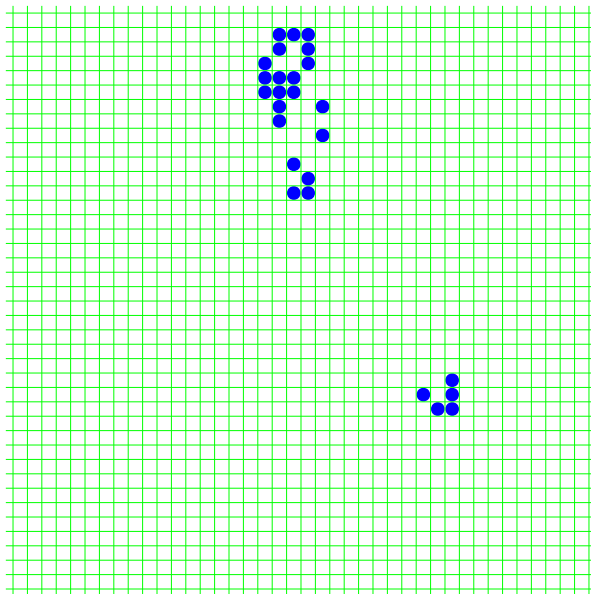
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



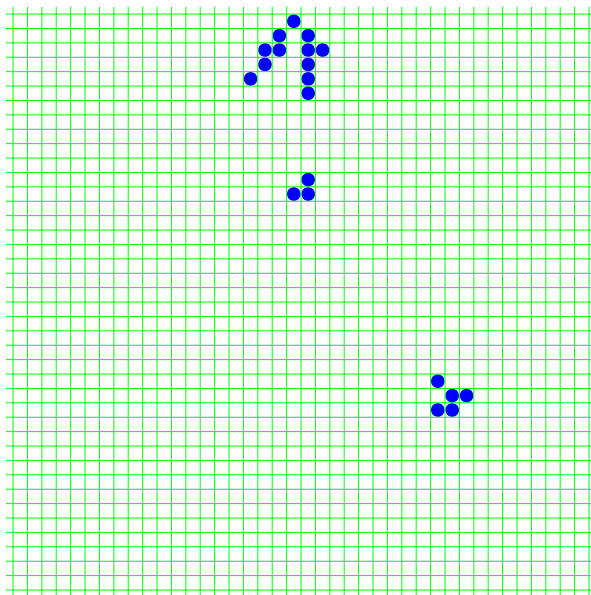
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



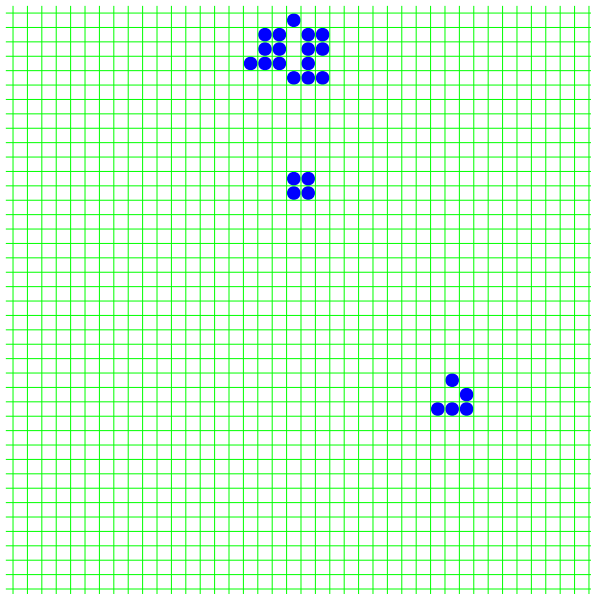
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



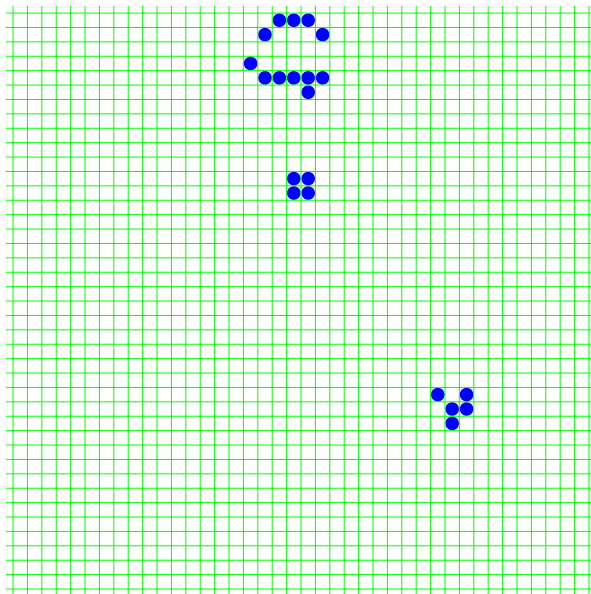
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



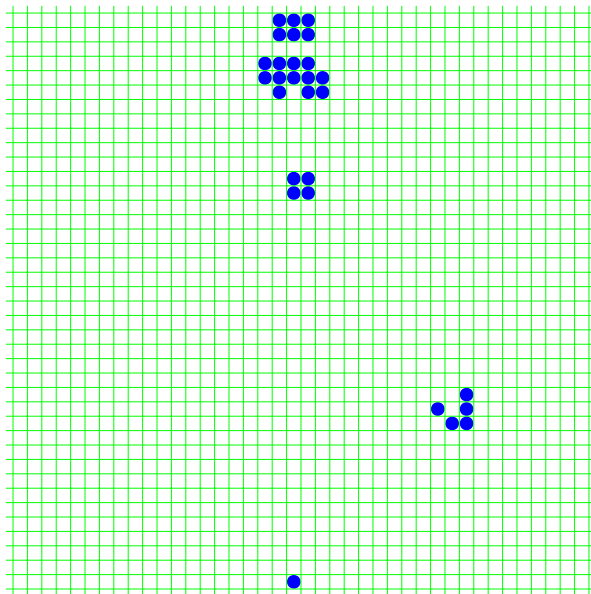
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



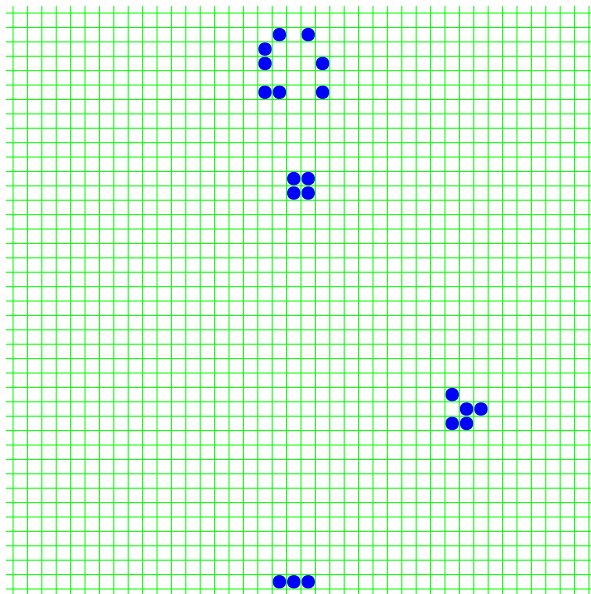
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



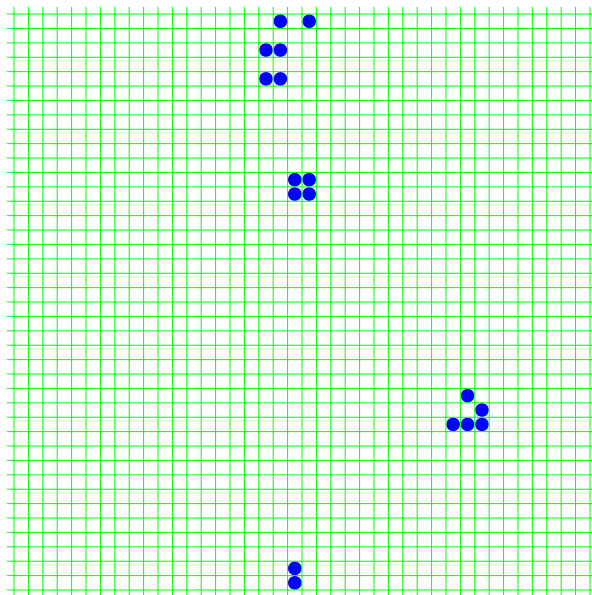
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



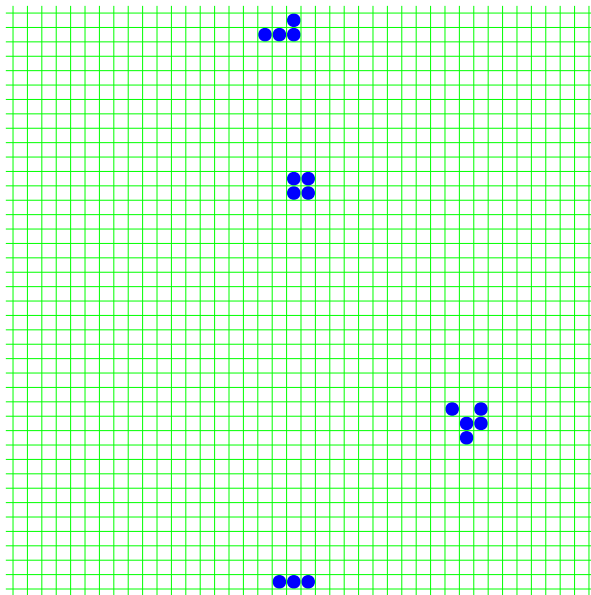
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



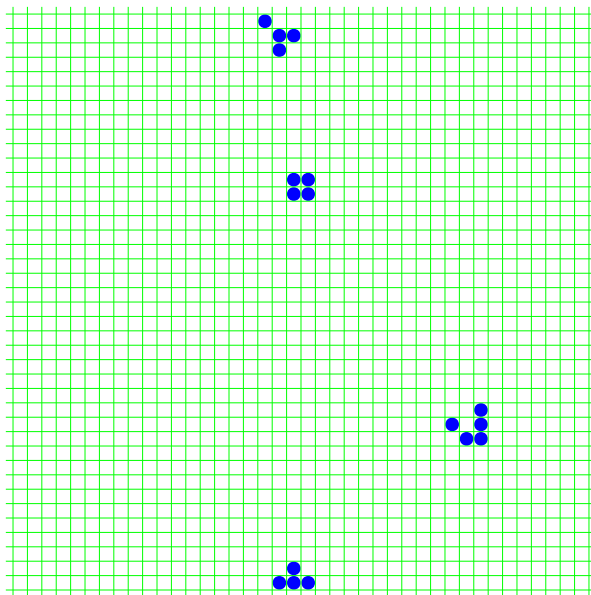
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



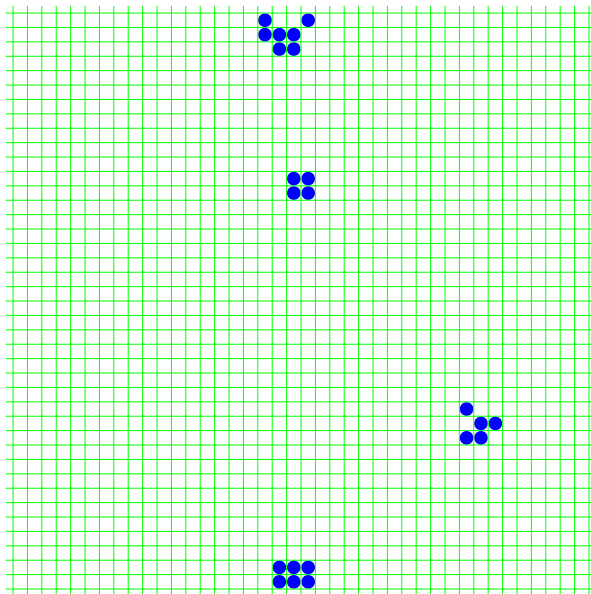
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



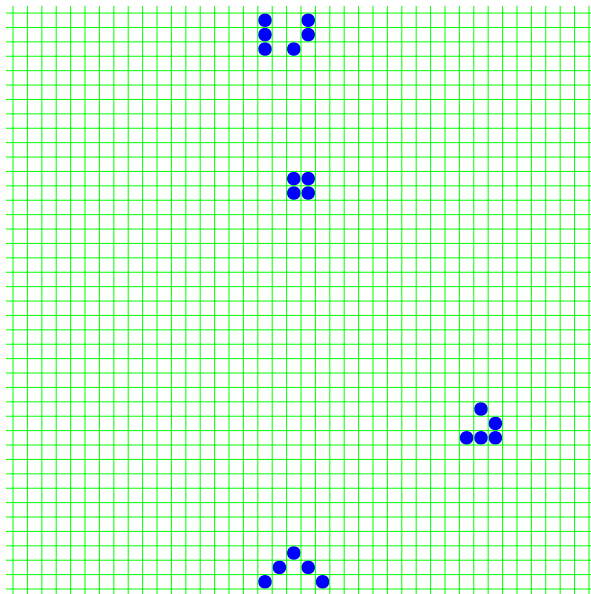
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



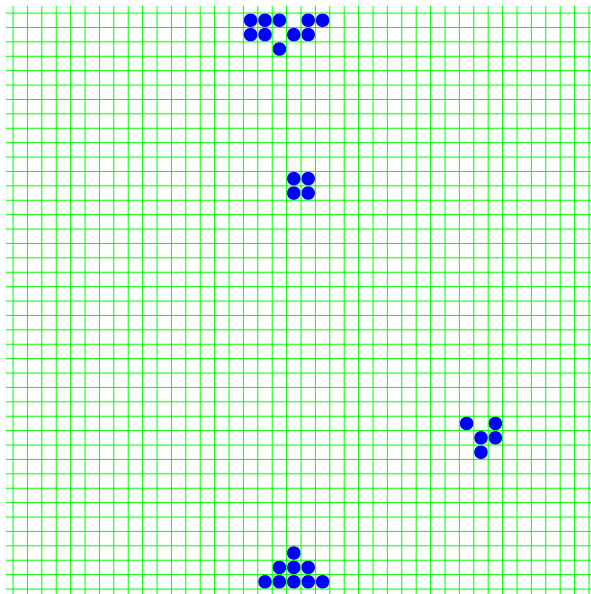
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



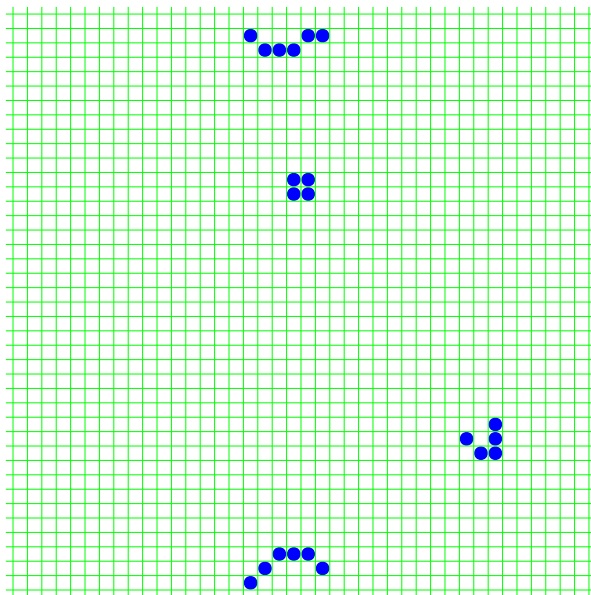
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



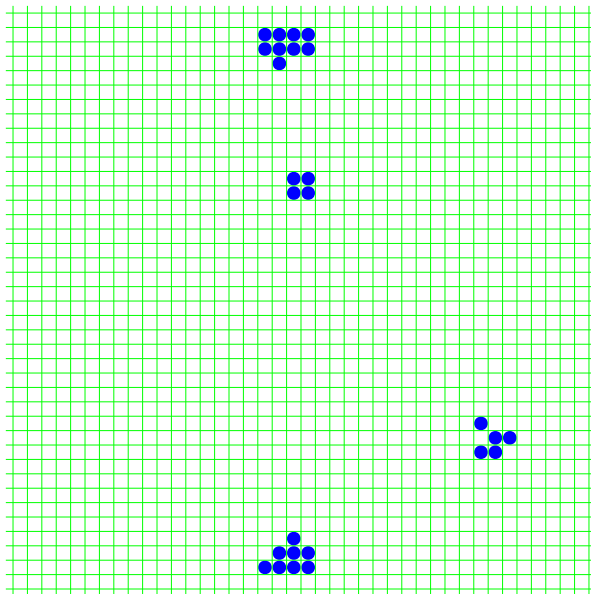
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



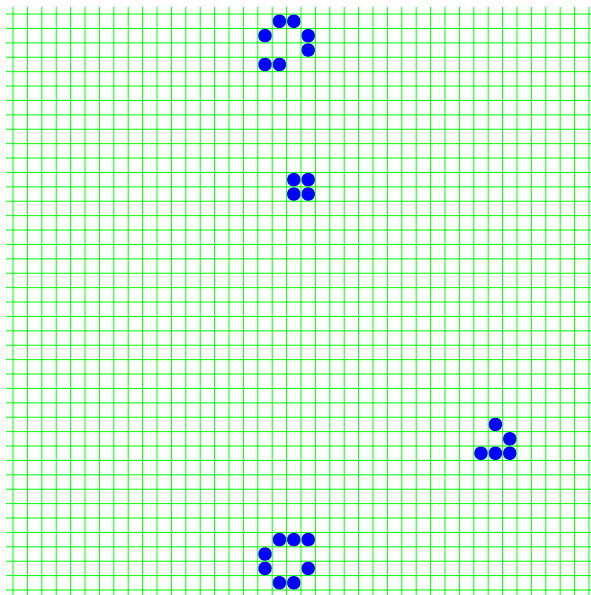
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



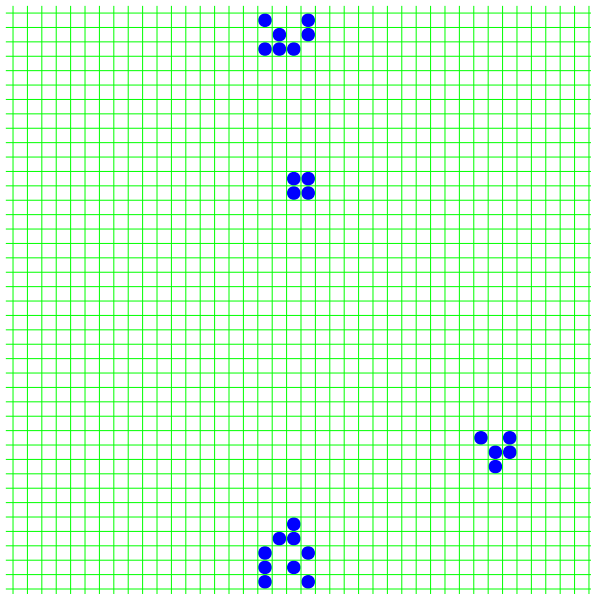
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



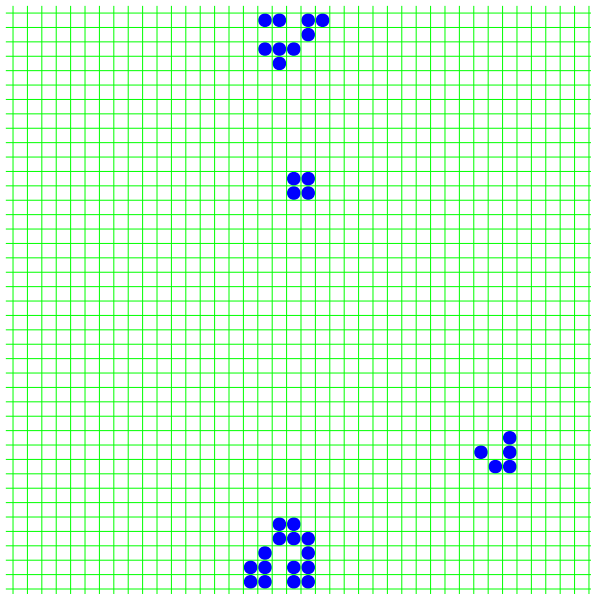
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



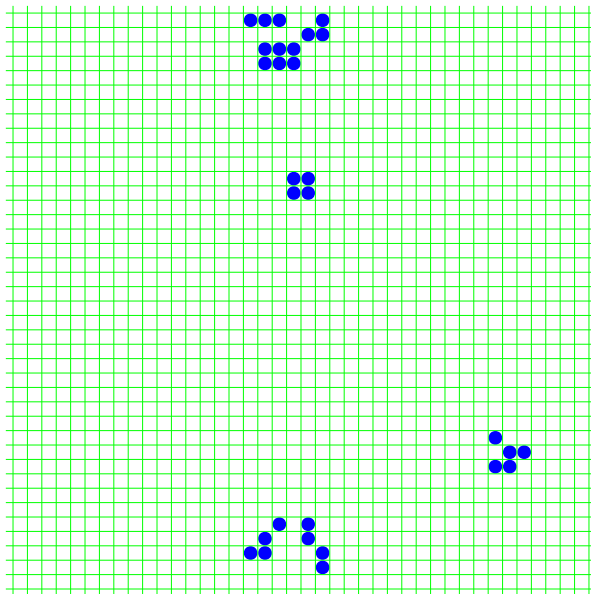
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



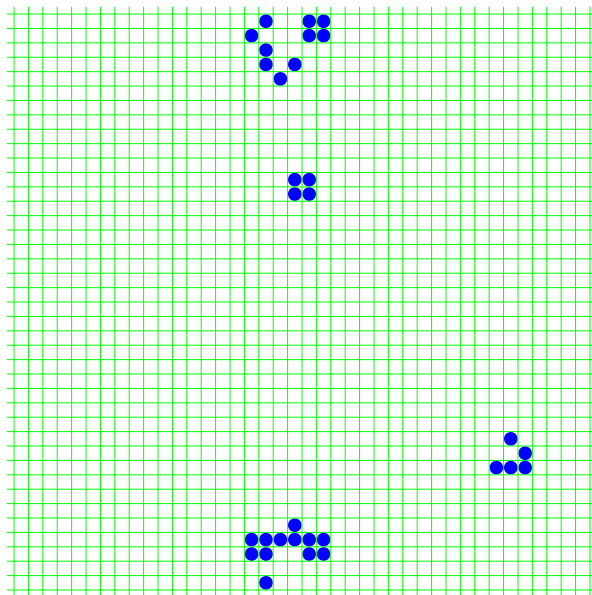
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



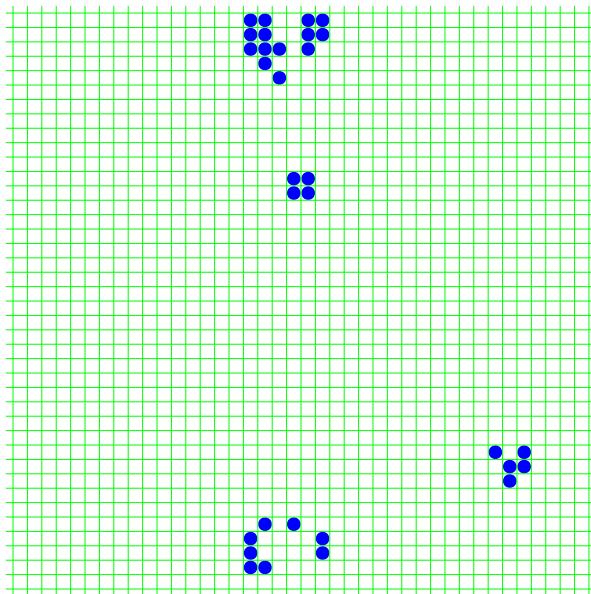
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



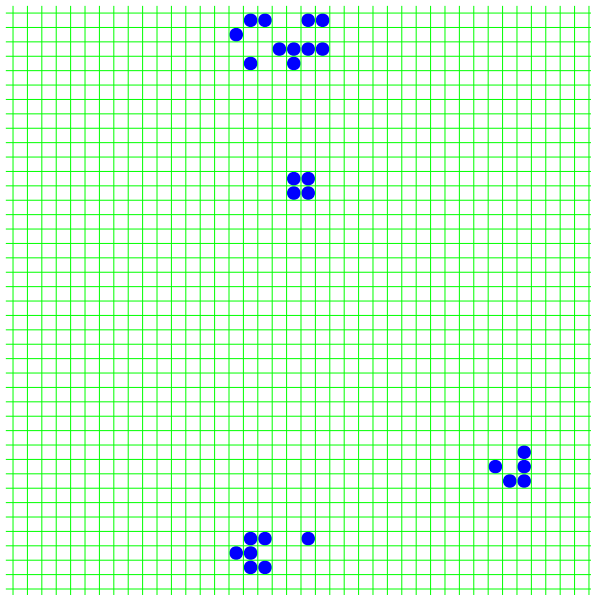
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



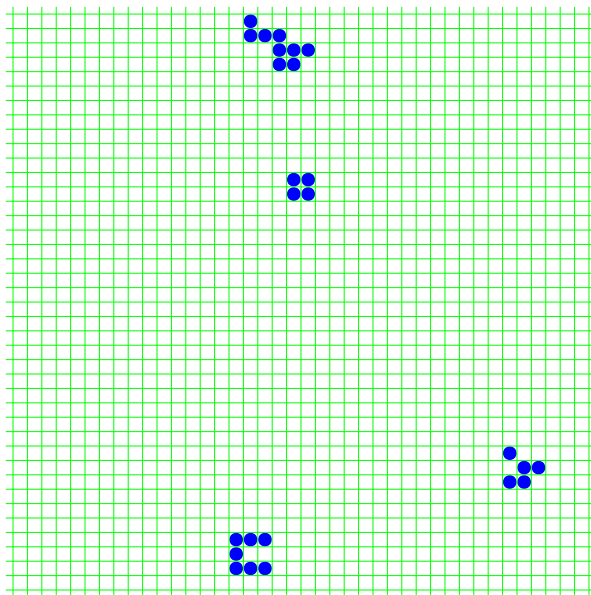
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



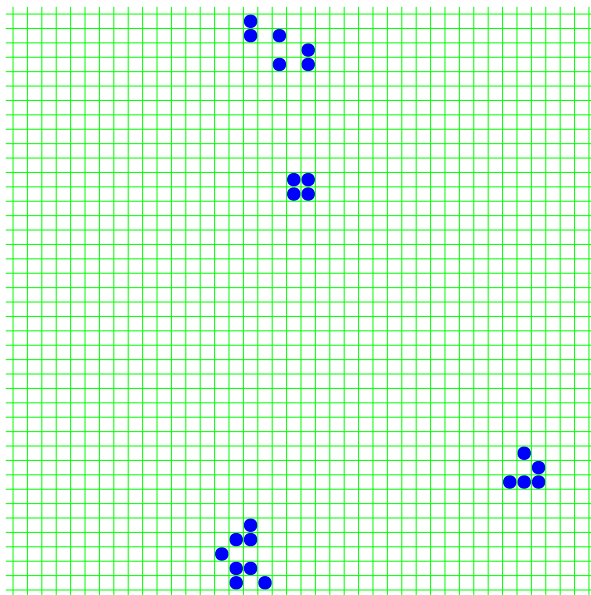
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



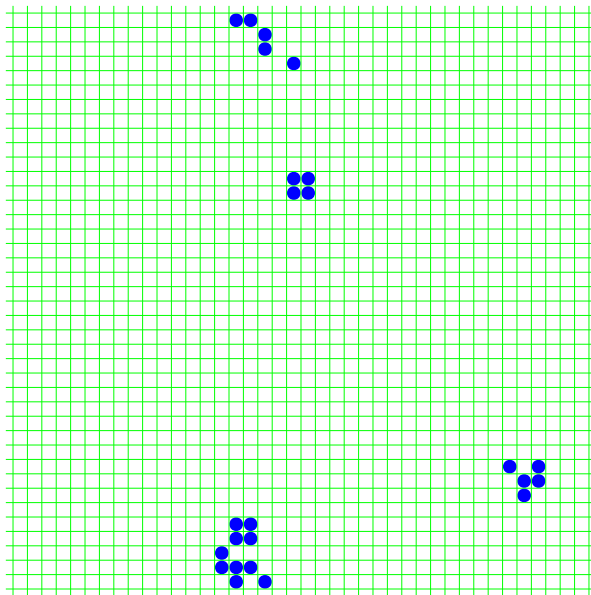
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



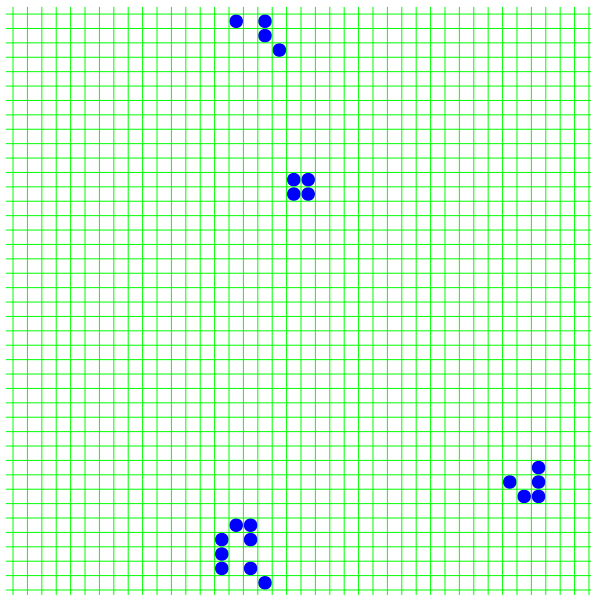
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



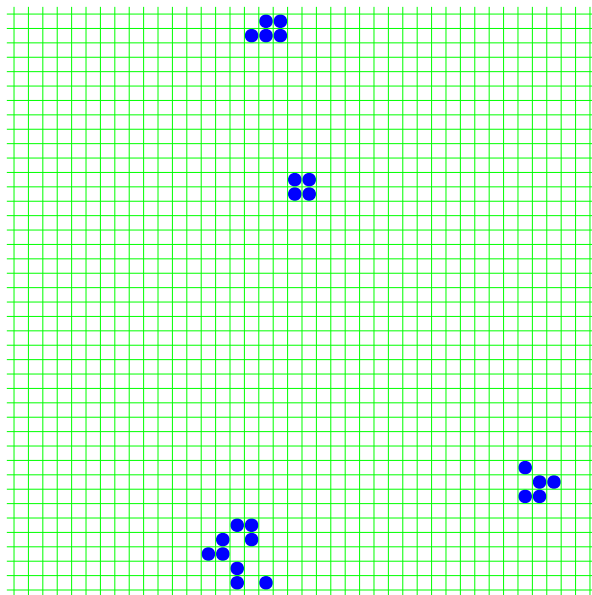
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



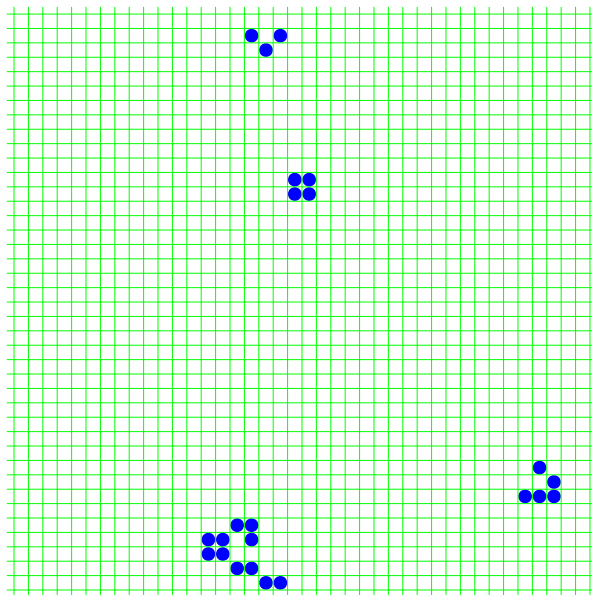
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



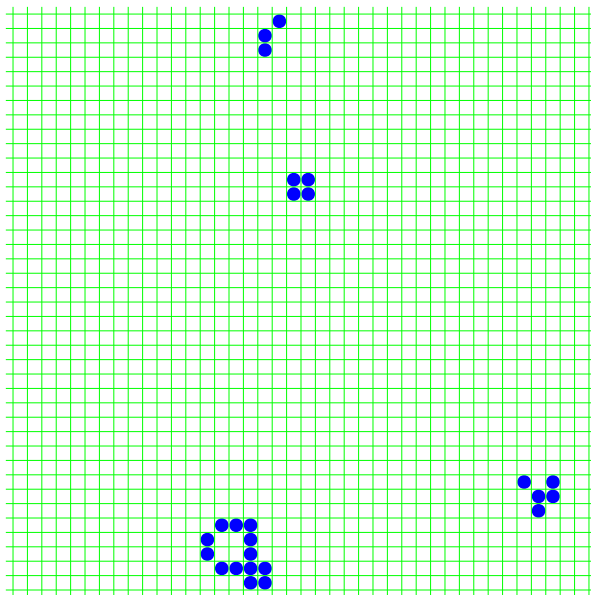
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



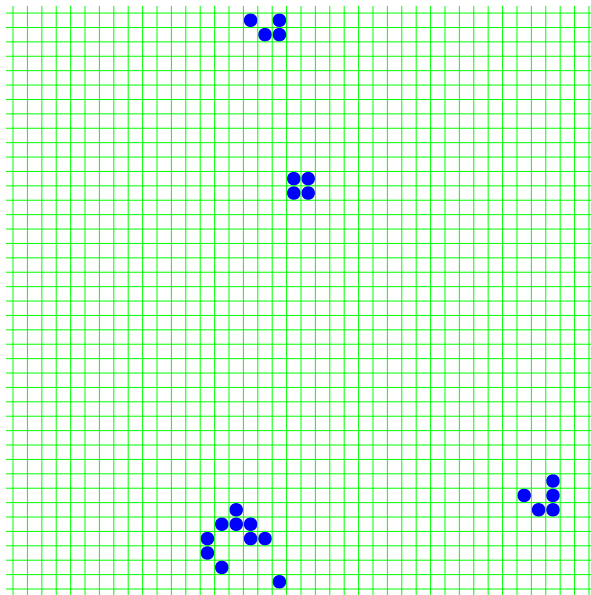
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



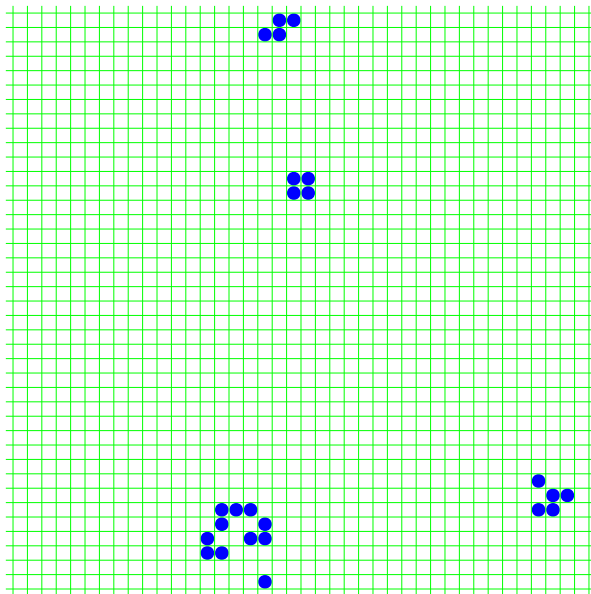
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



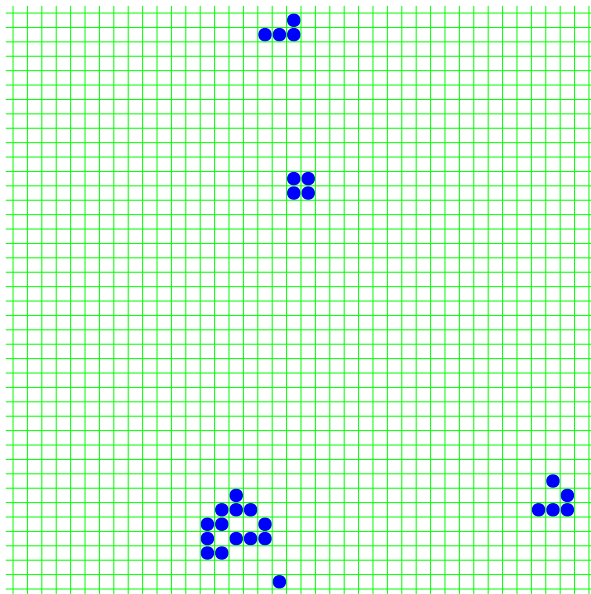
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



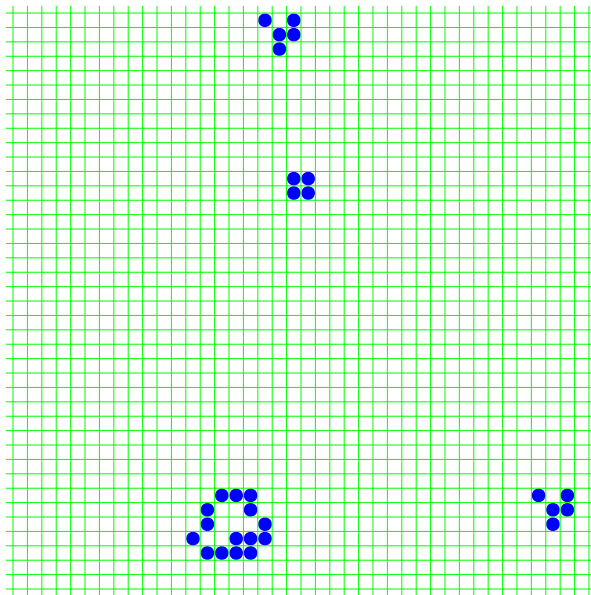
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



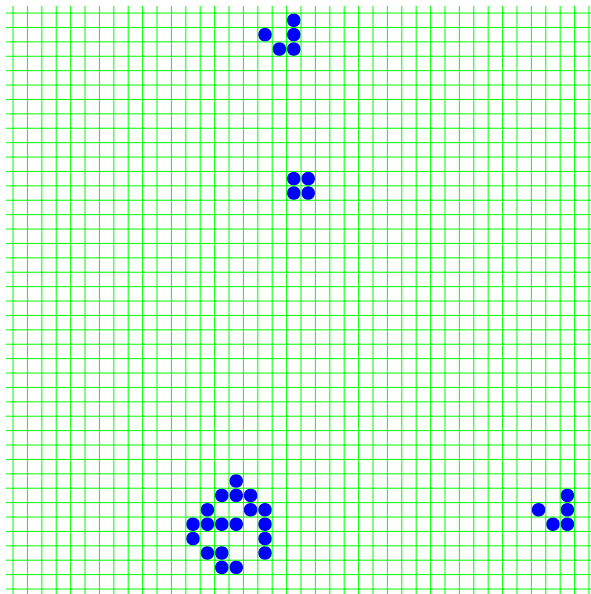
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



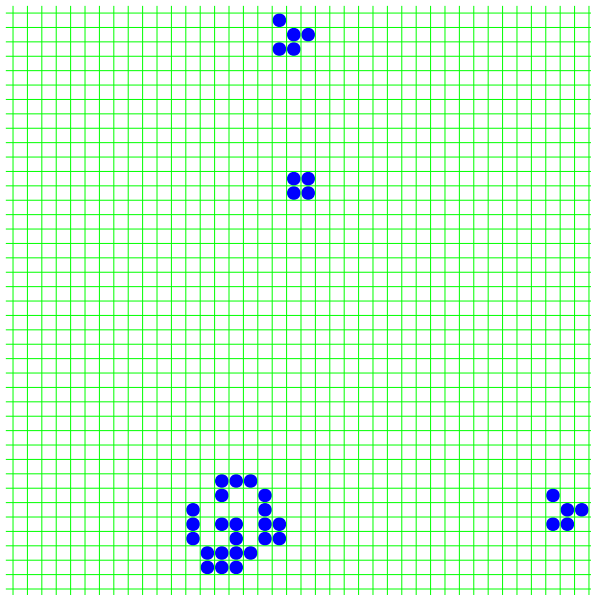
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



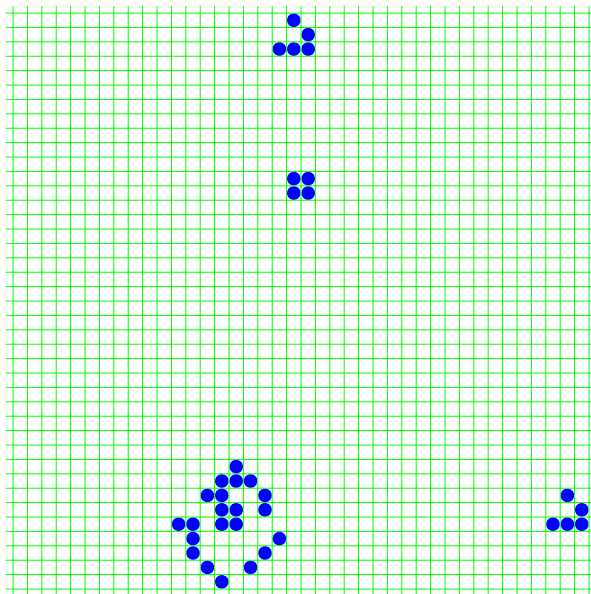
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



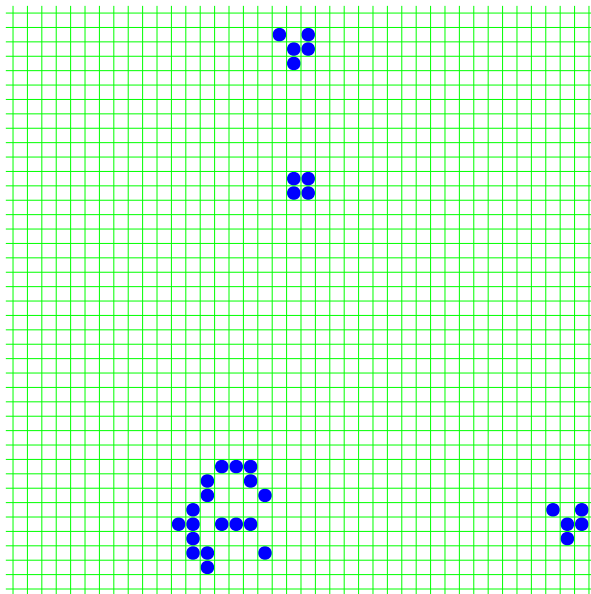
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



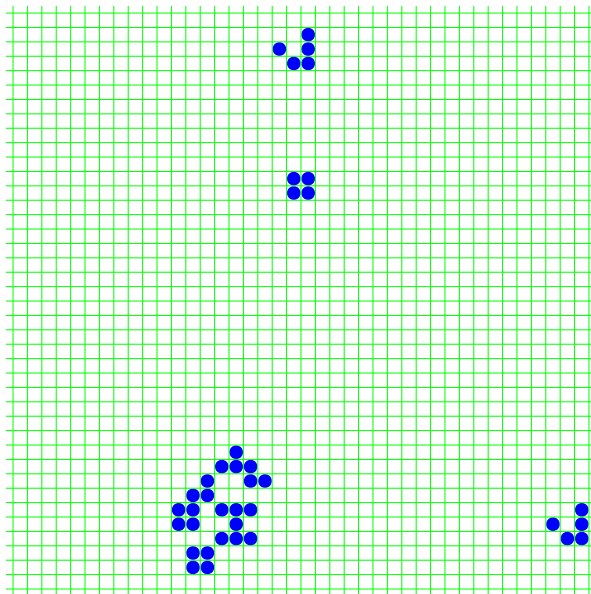
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



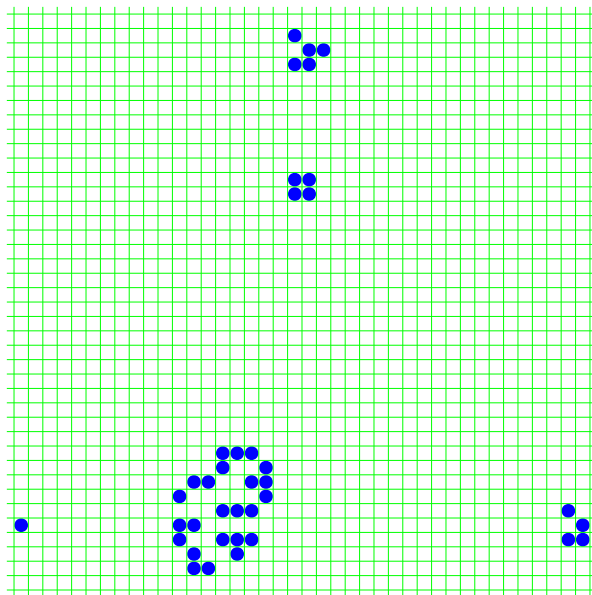
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



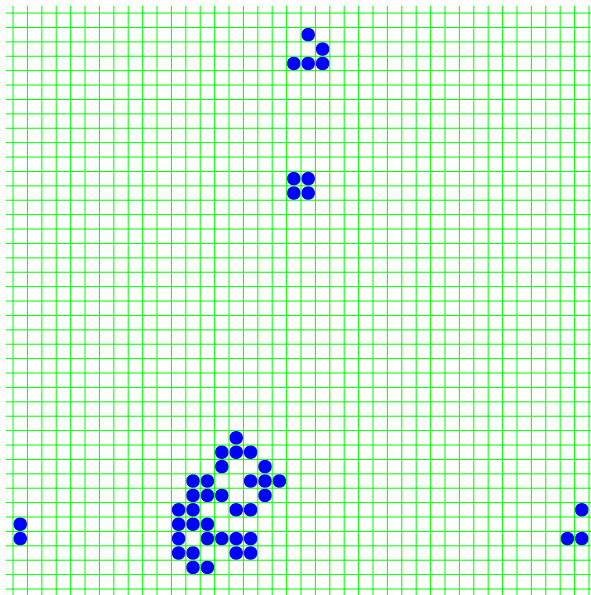
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



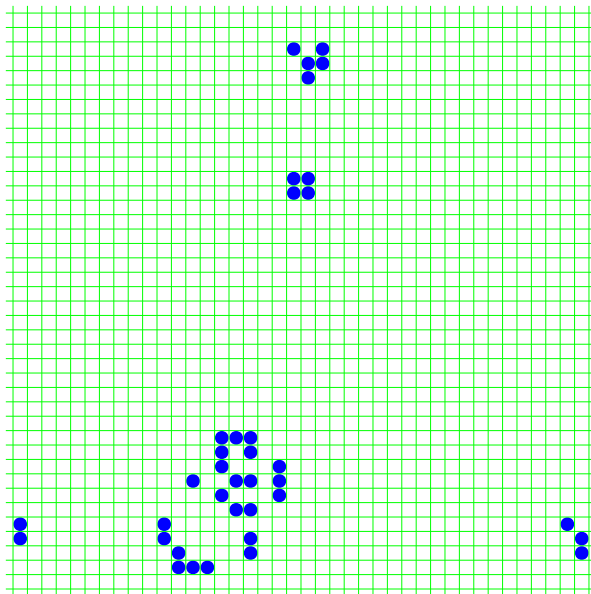
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



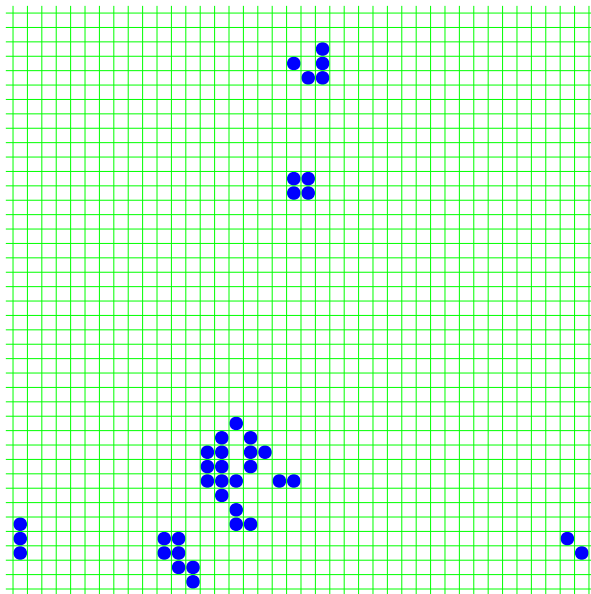
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



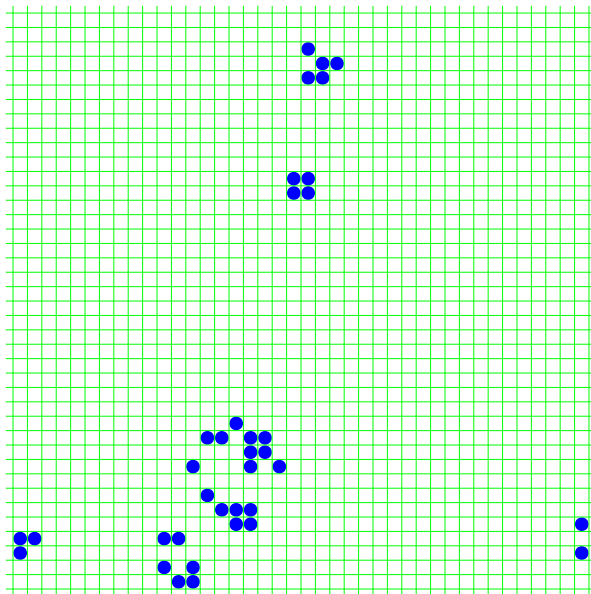
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



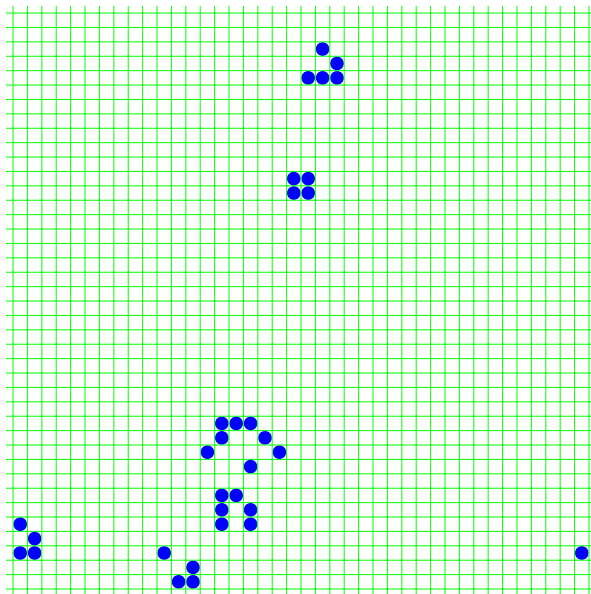
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



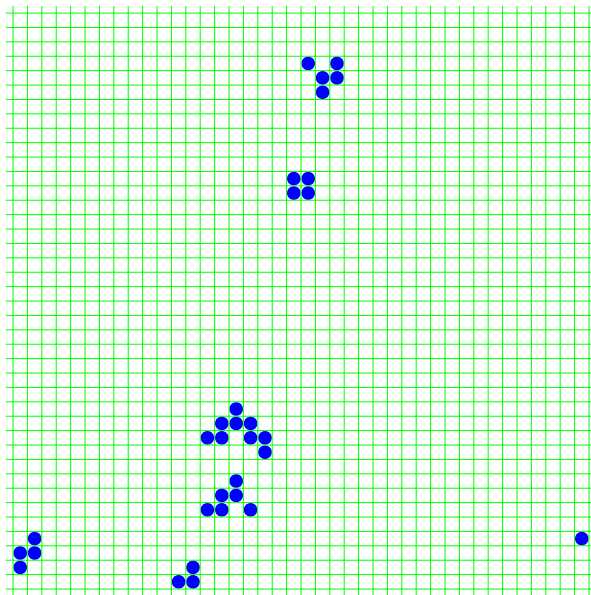
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



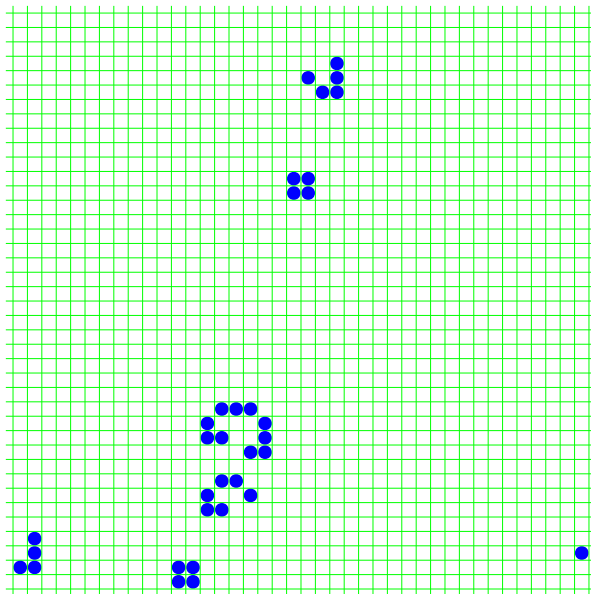
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



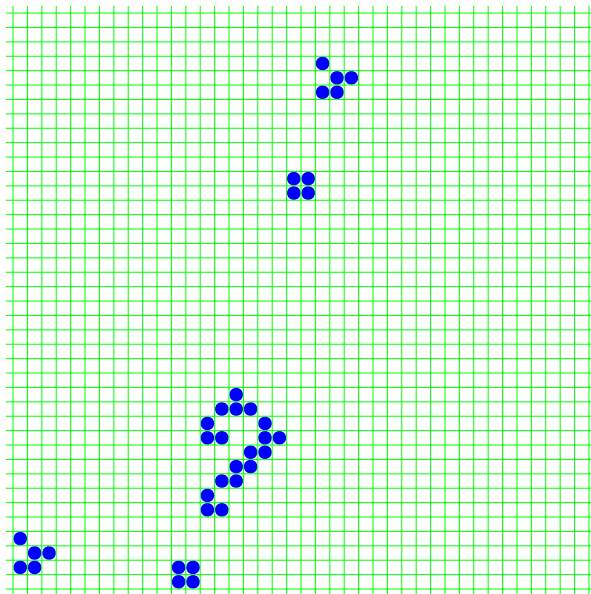
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



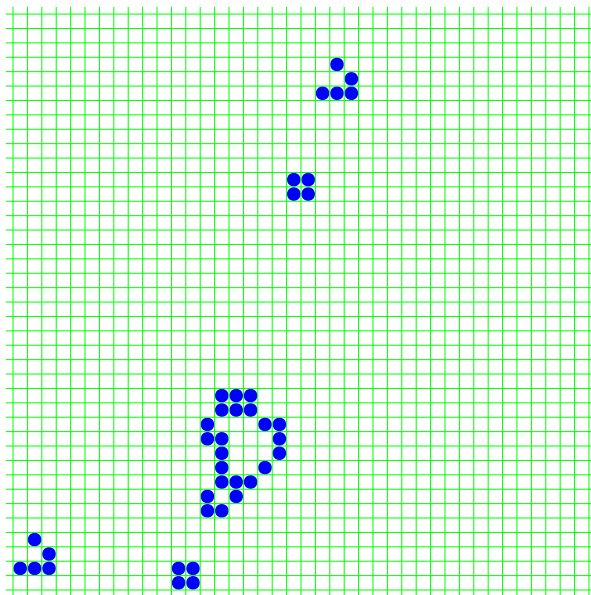
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



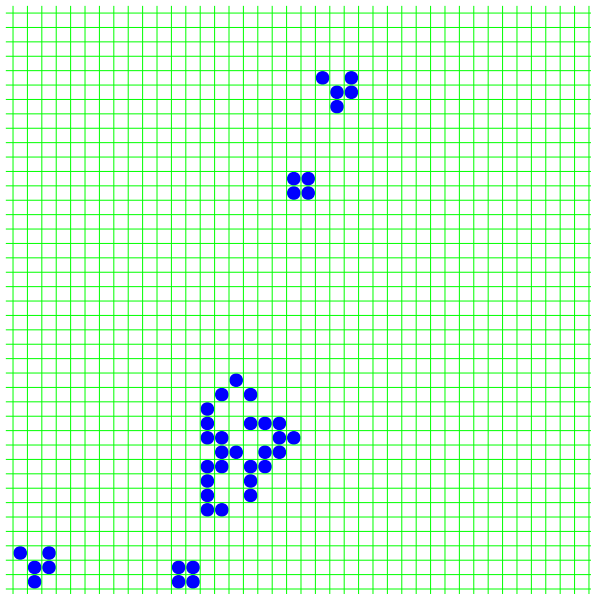
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



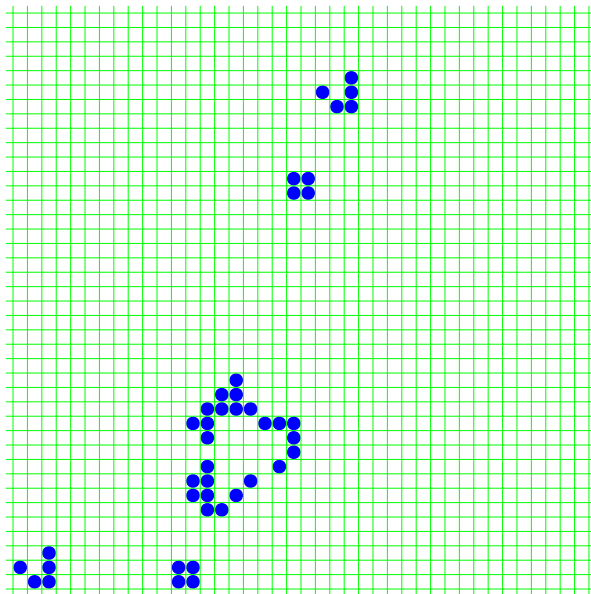
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



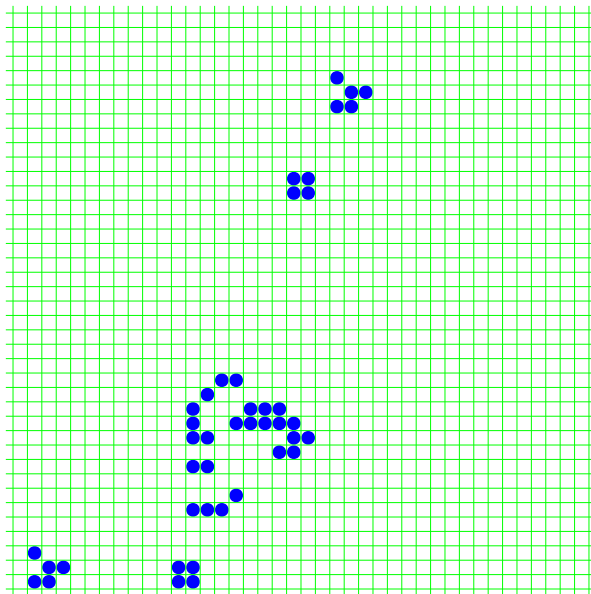
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



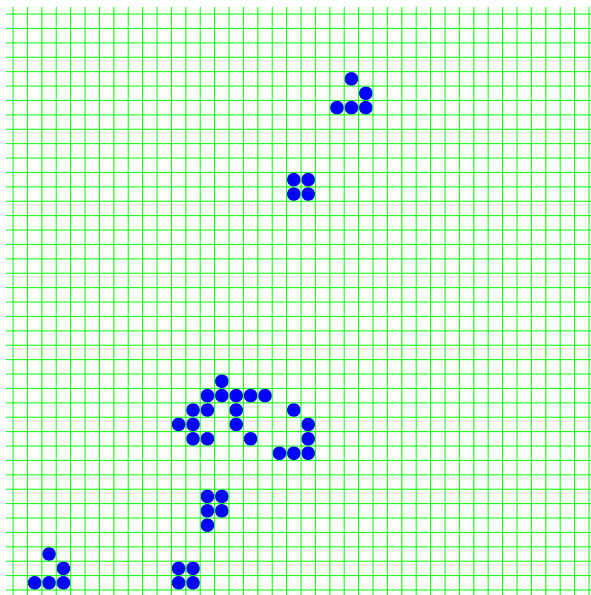
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



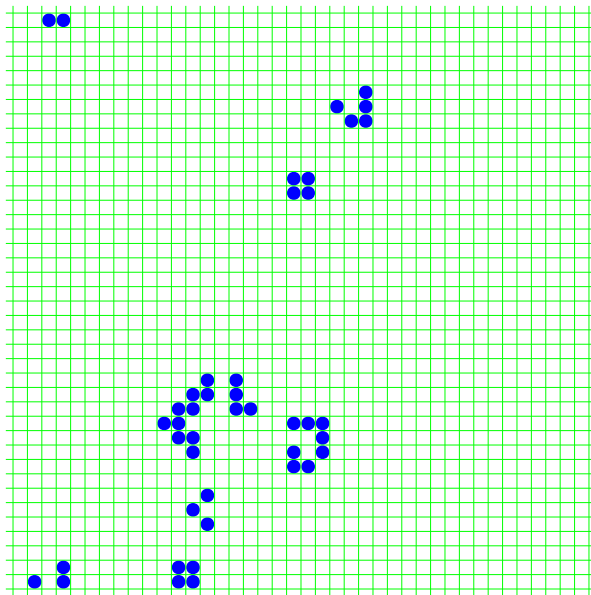
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



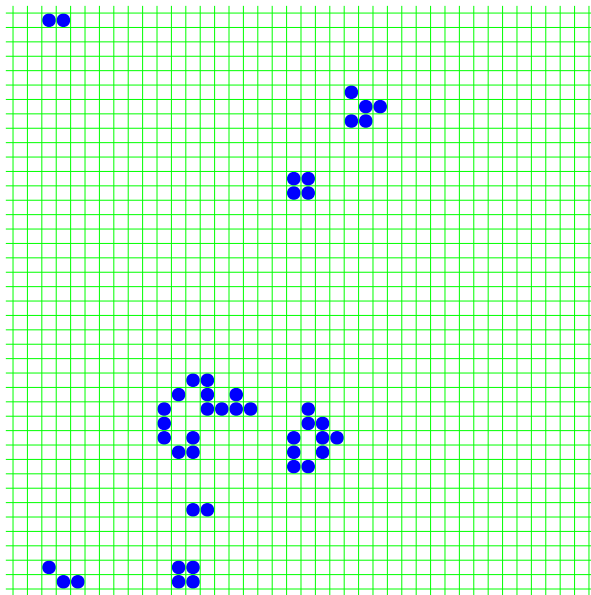
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



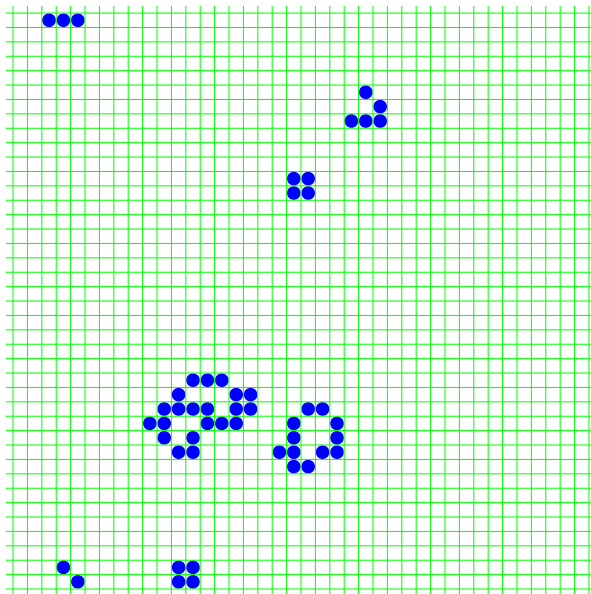
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



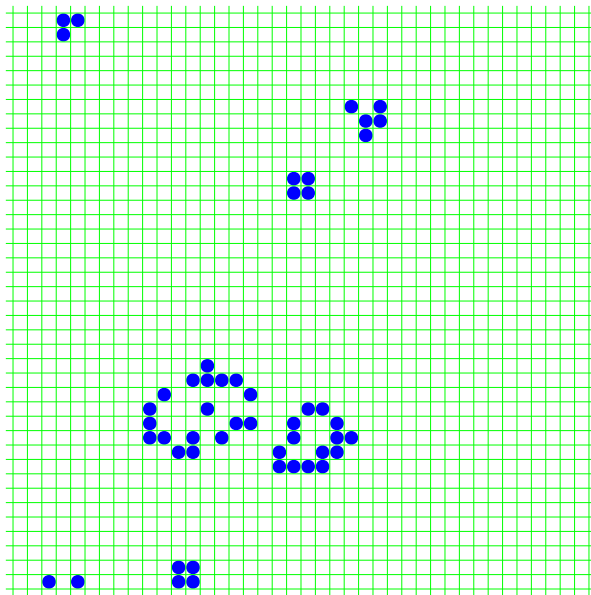
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



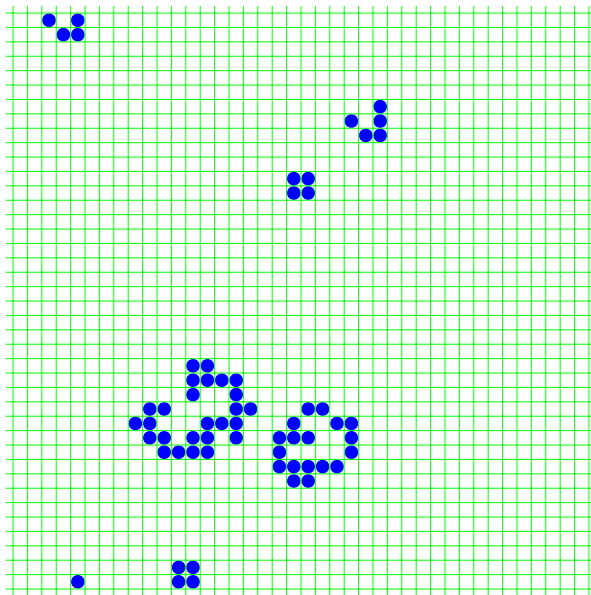
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



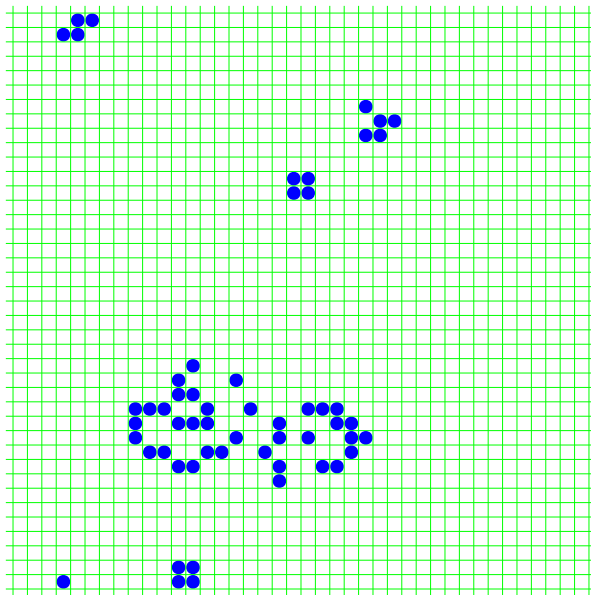
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



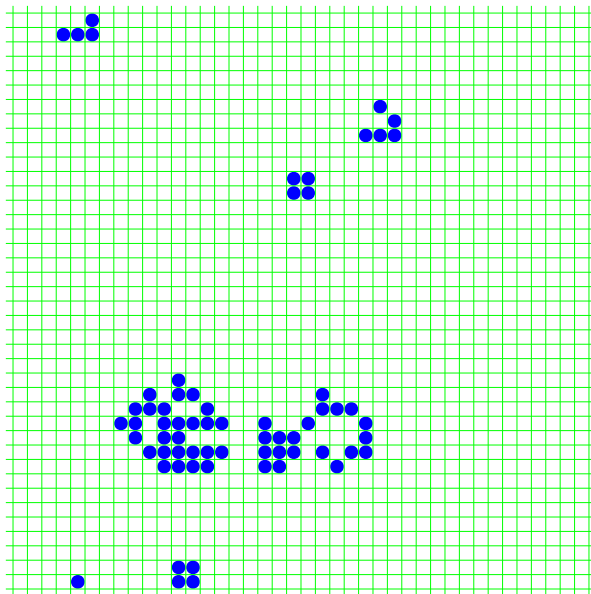
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



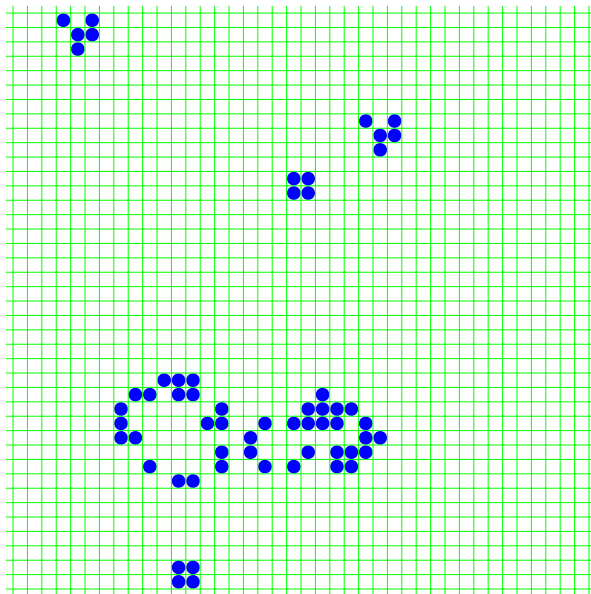
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



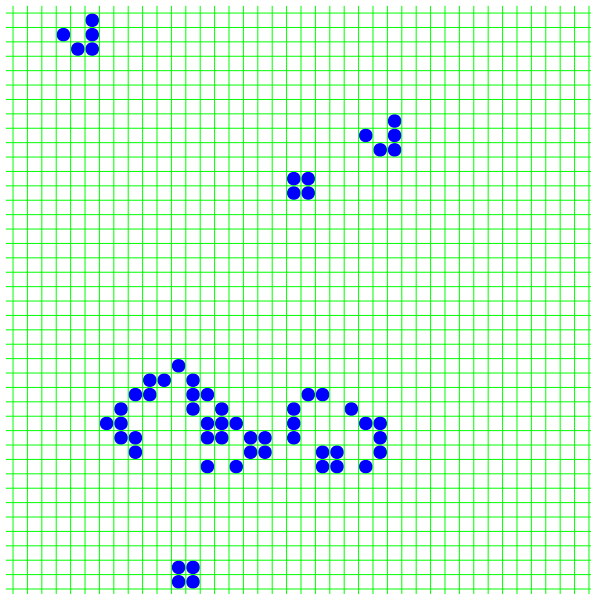
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



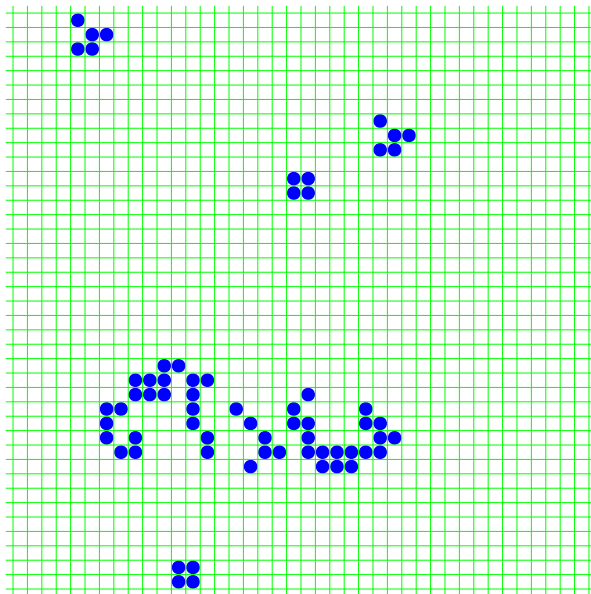
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



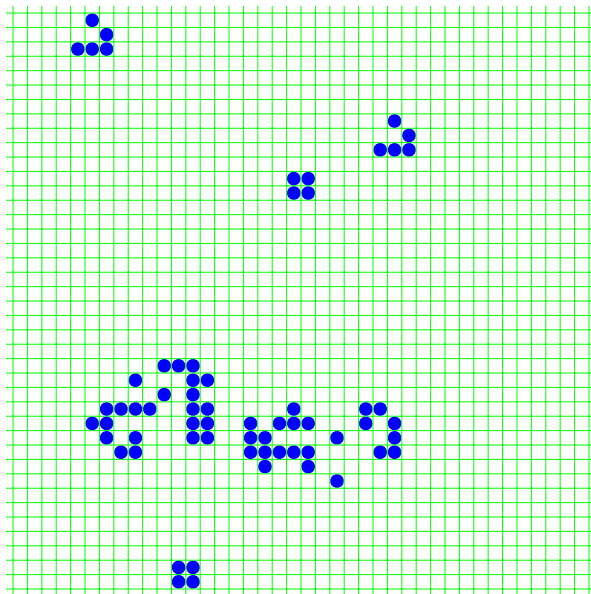
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



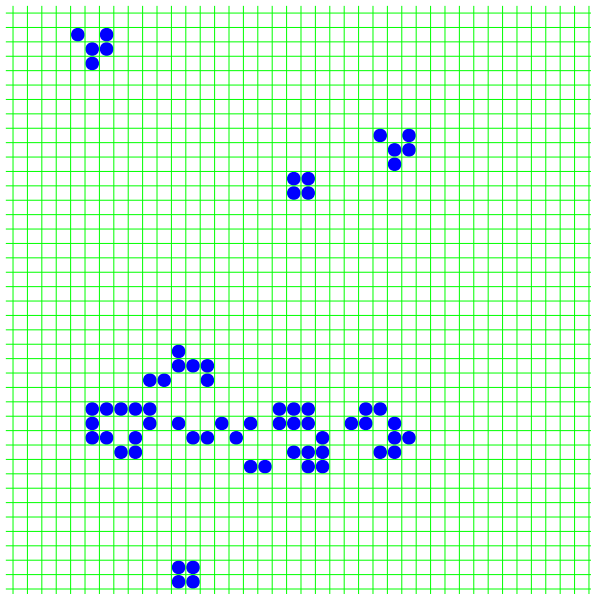
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



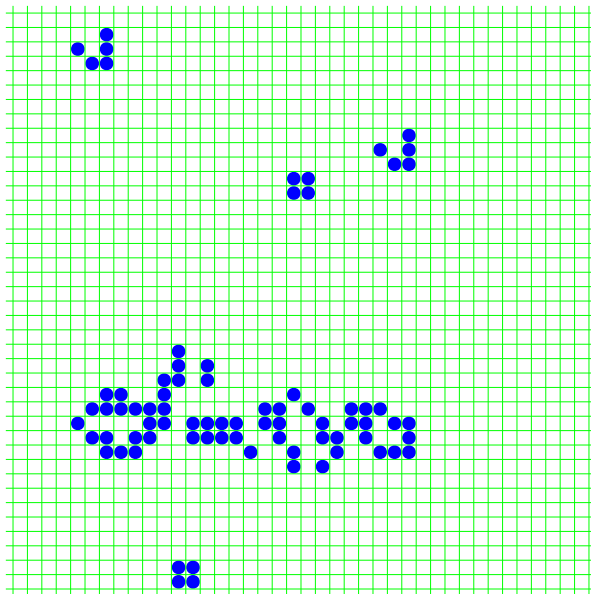
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



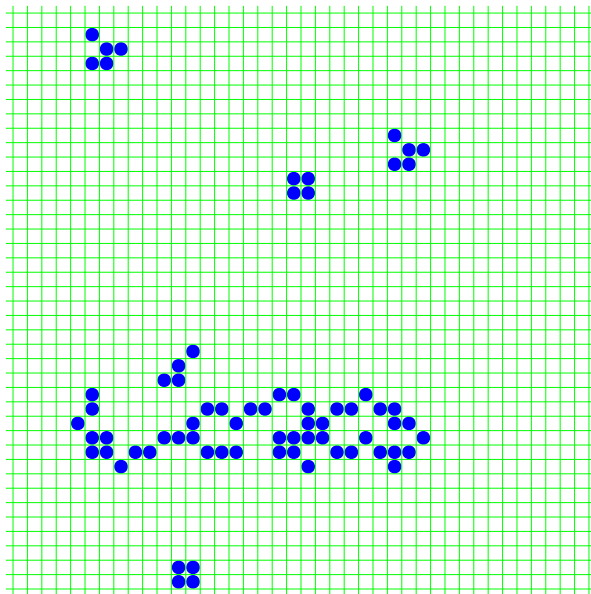
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



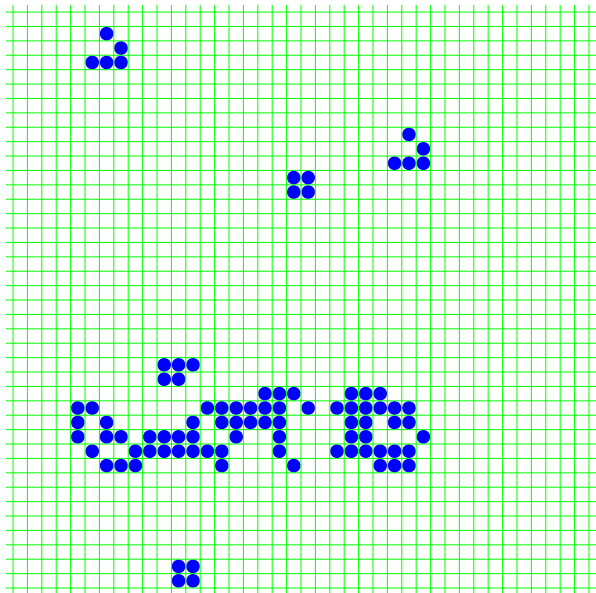
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



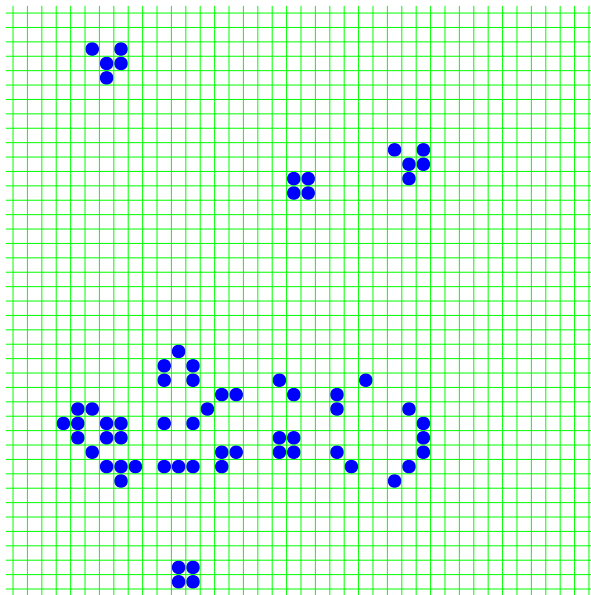
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



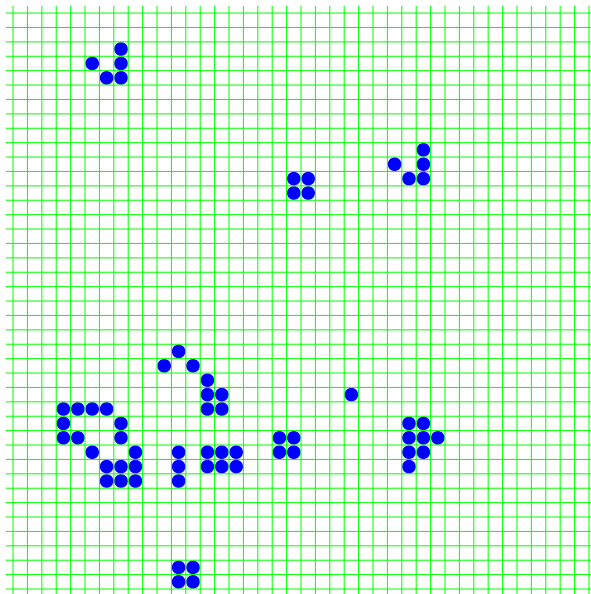
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



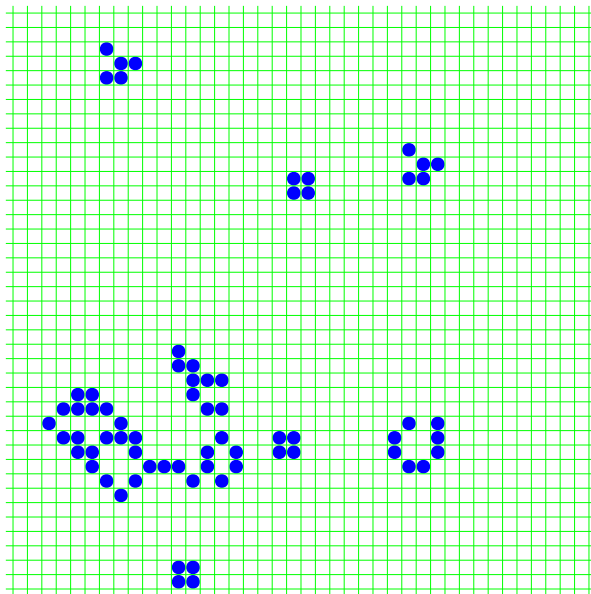
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



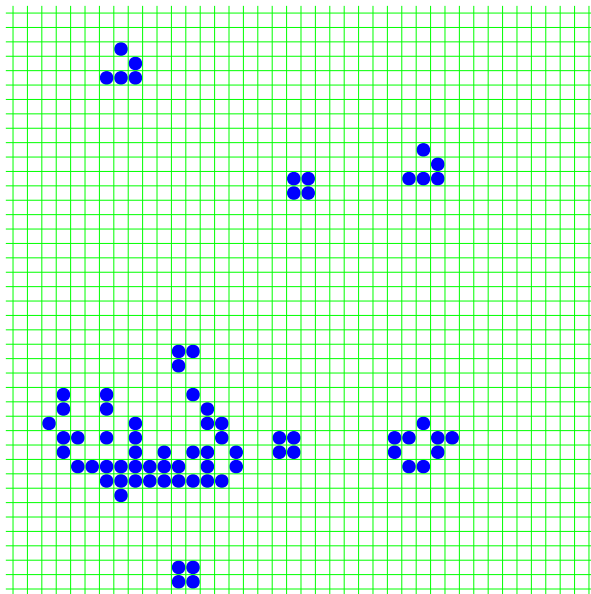
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



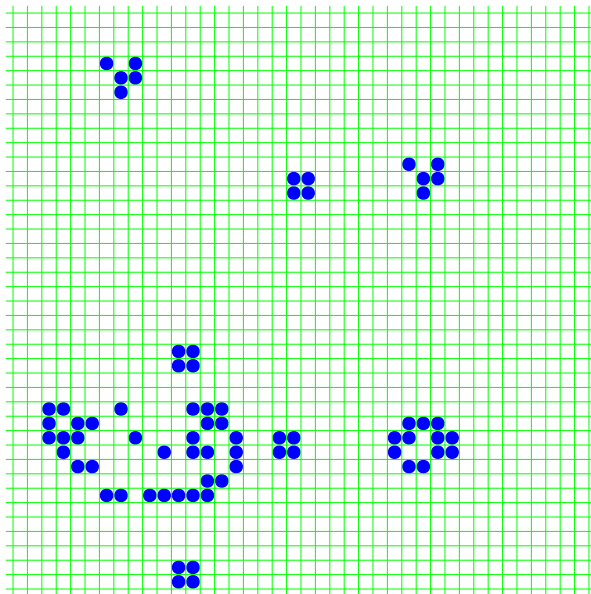
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



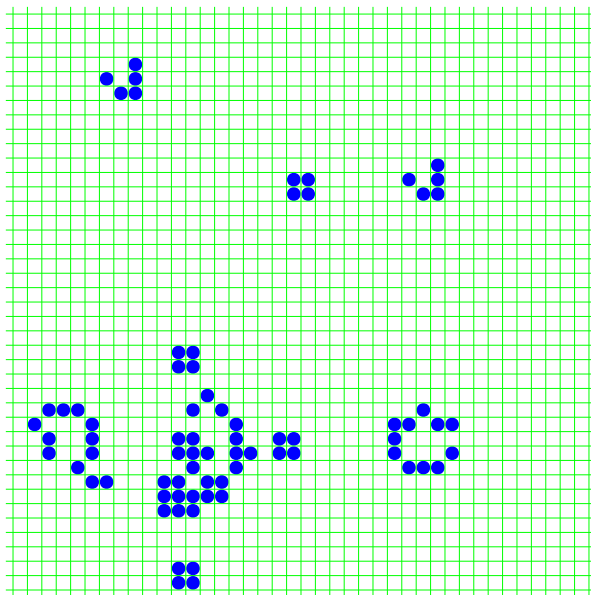
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



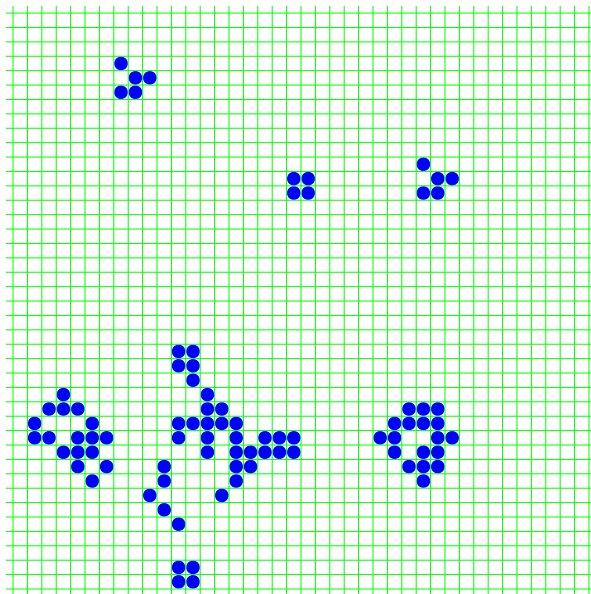
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



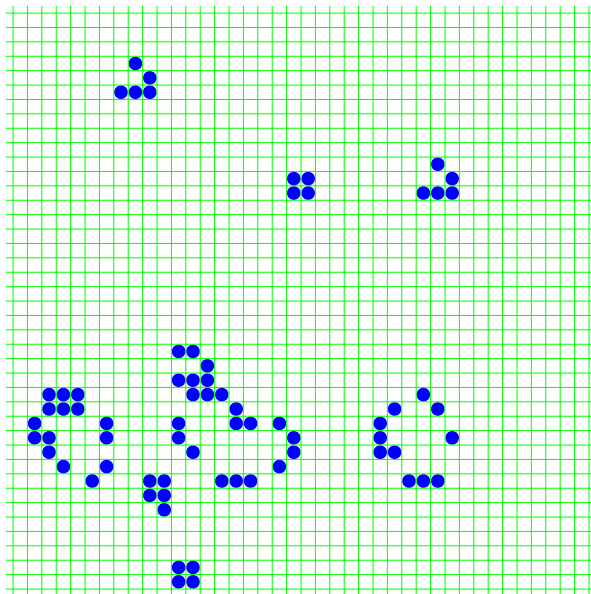
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



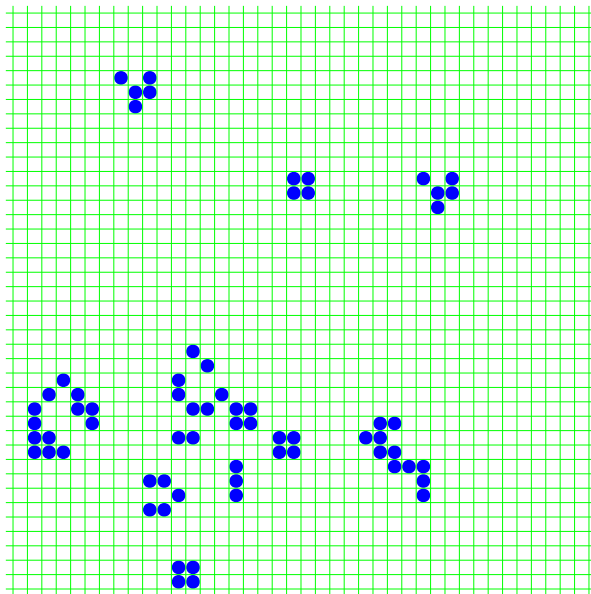
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



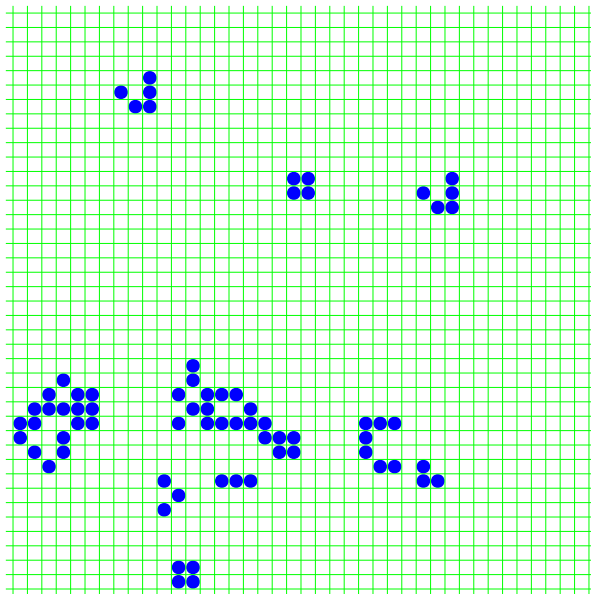
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



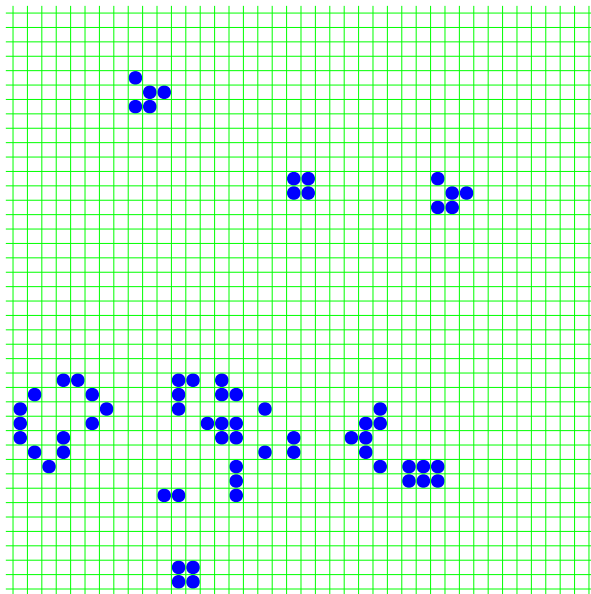
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



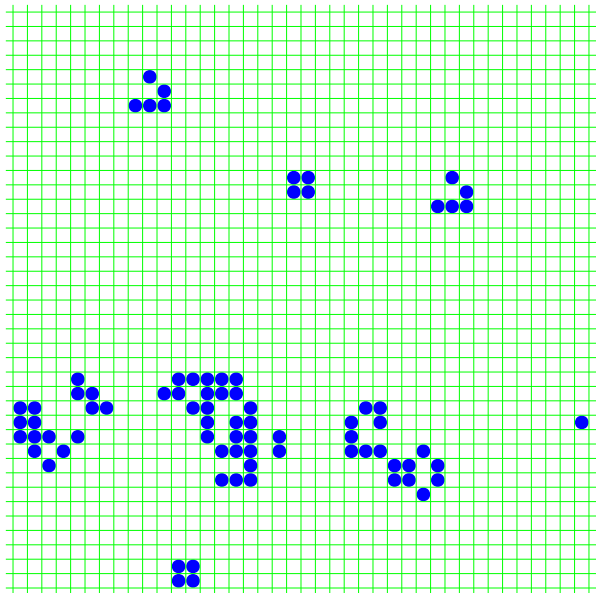
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



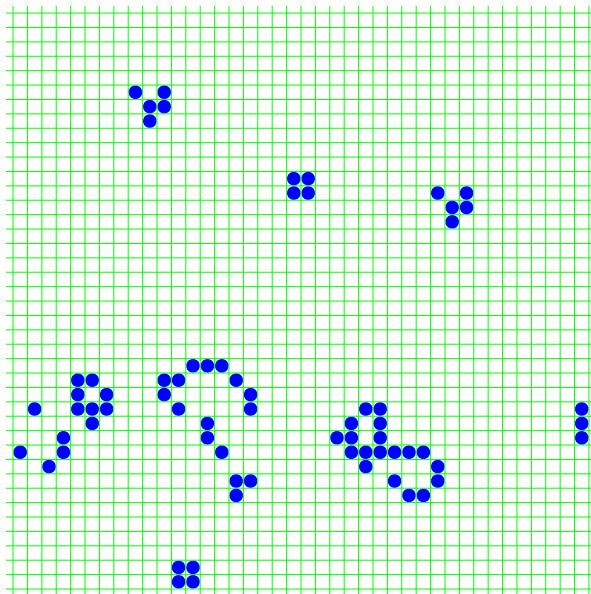
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



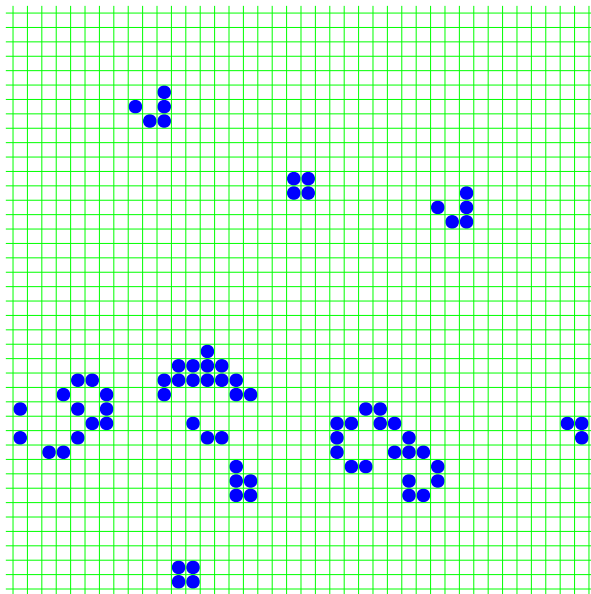
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



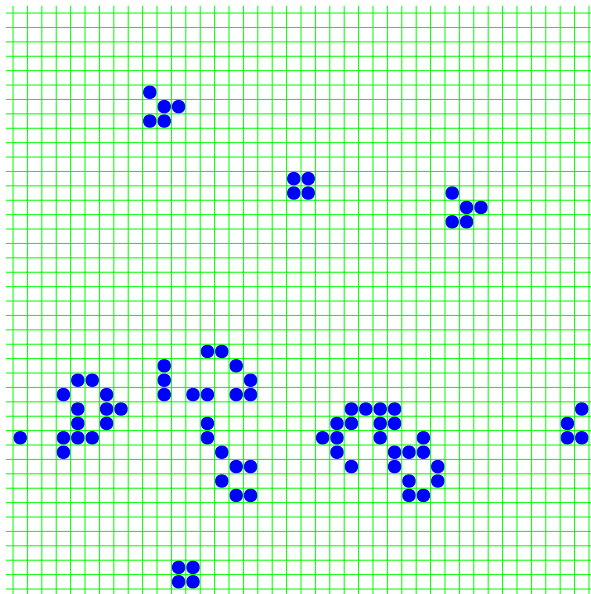
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



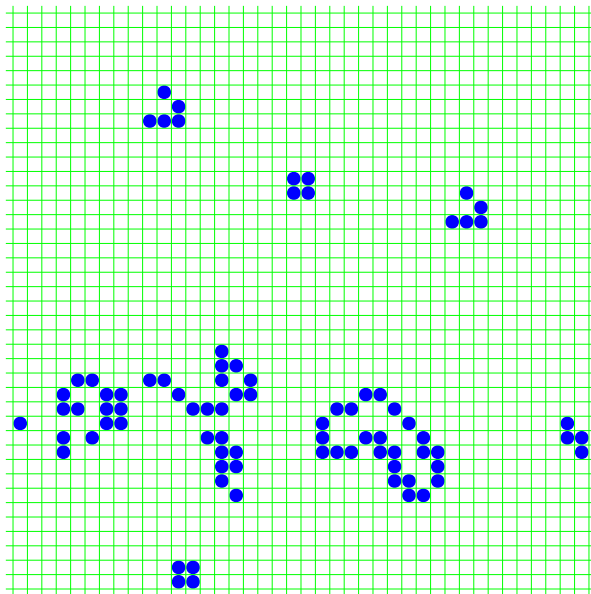
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



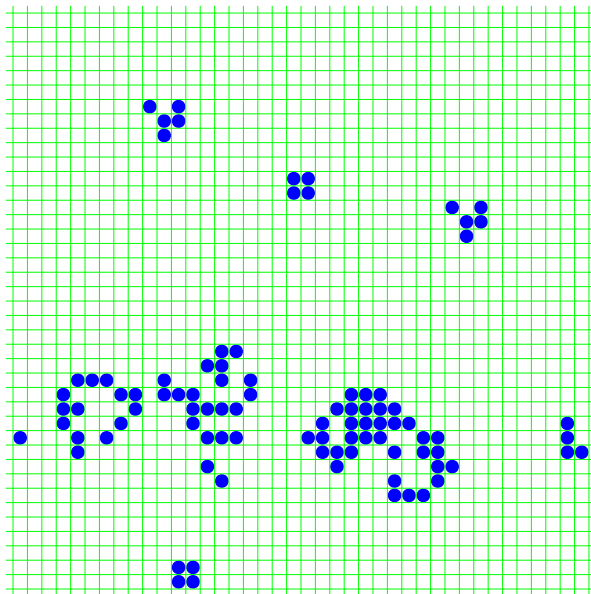
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



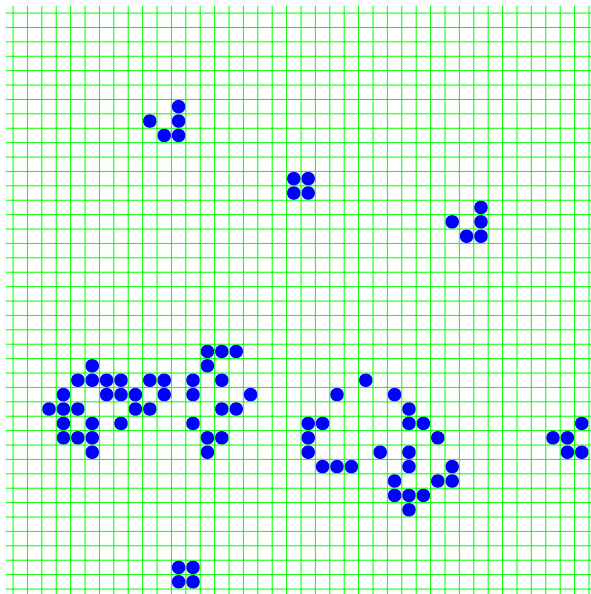
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



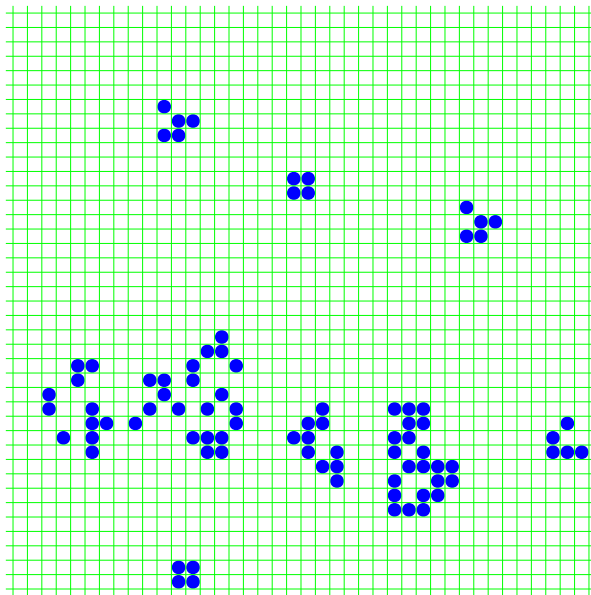
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



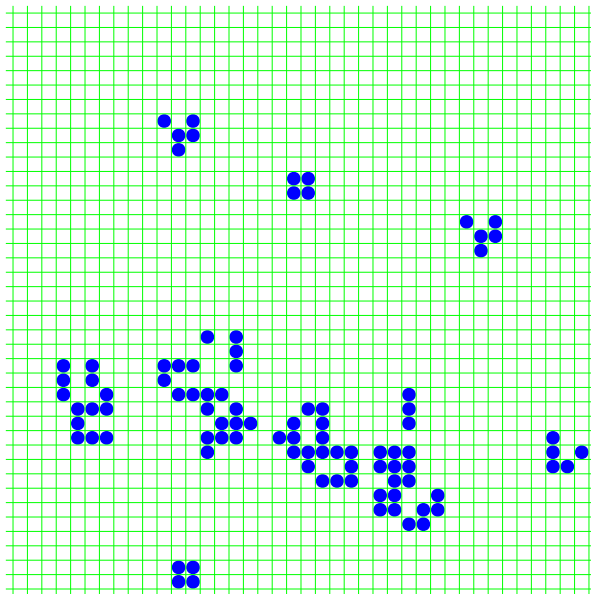
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



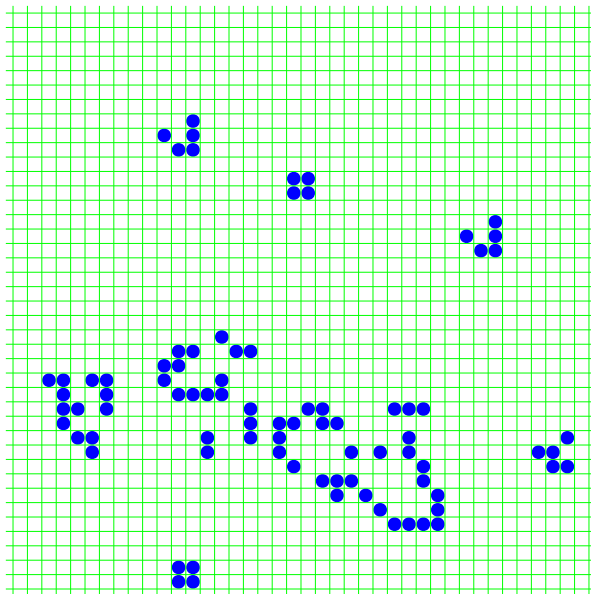
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



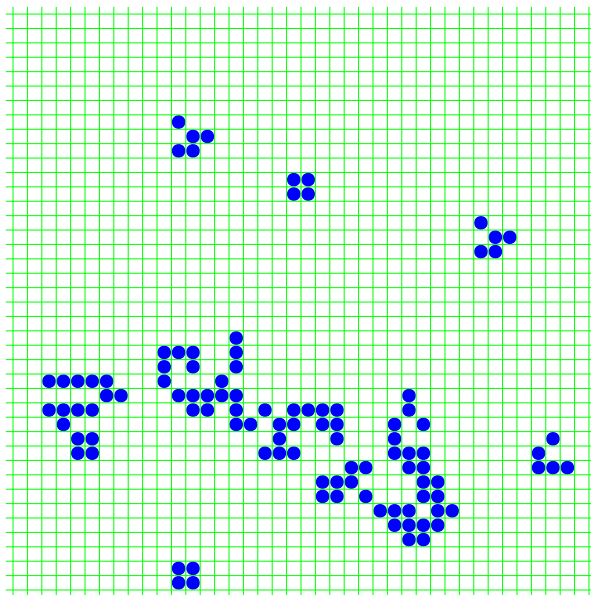
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



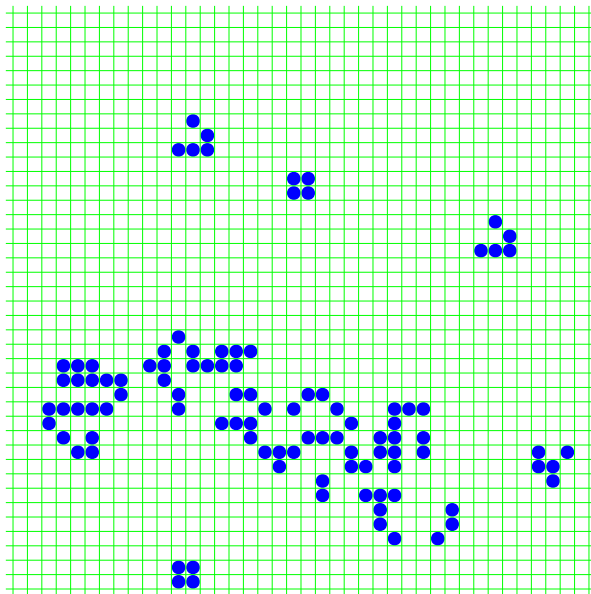
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



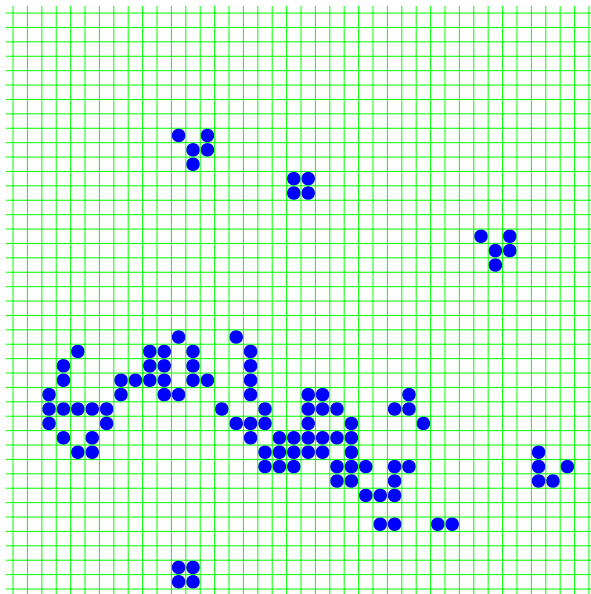
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



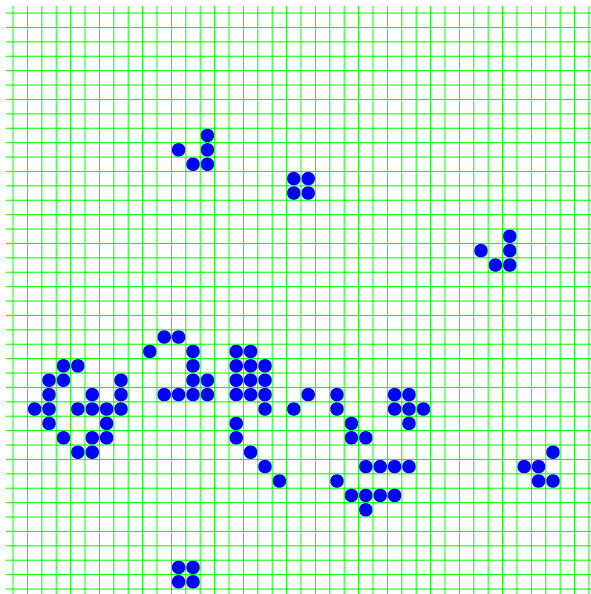
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



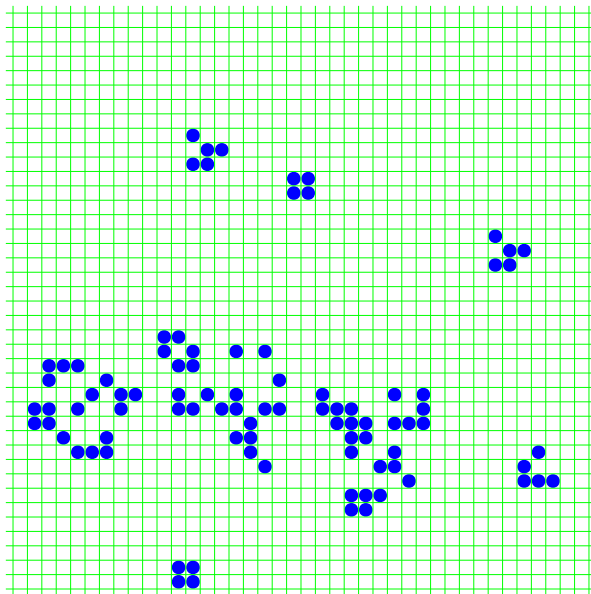
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



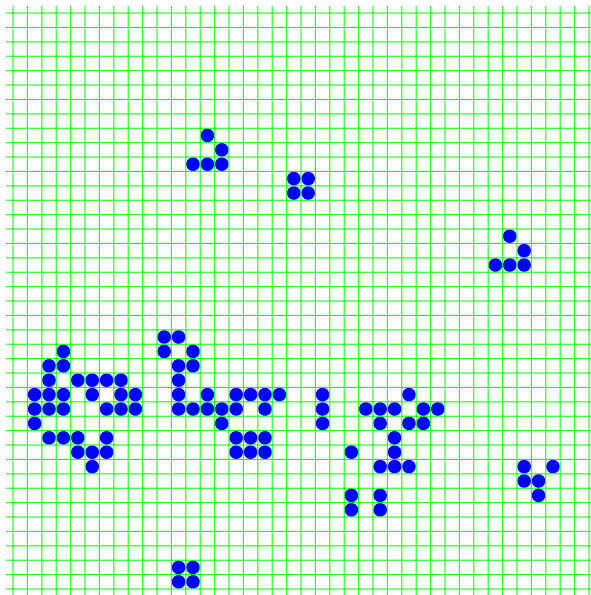
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



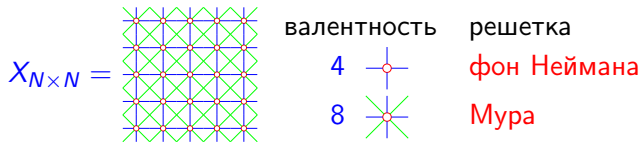
Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



Пример “солитона”: “Планер” автомата Конвея “Жизнь”



Симметрии торической квадратной решетки размера $N \times N$



Типичный случай $N = 3, 5, 6, \dots, \infty$ $|G_{N \times N}| = 8N^2$

$G_{N \times N} = \mathbf{T}^2 \rtimes D_8$ — полупрямое произведение, \mathbf{T}^2 — нормальный делитель

$\mathbf{T}^2 = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ — группа трансляций ($\mathbb{Z}_\infty \equiv \mathbb{Z}$)

$D_8 = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ — диэдральная группа (\mathbb{Z}_4 — повороты на 90° , \mathbb{Z}_2 — отражения)

напоминает евклидову группу $E_2 = (\mathbf{T}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rtimes O(2)$

Исключение: $N = 4$ $|G_{N \times N}| = 3 \times 8N^2$

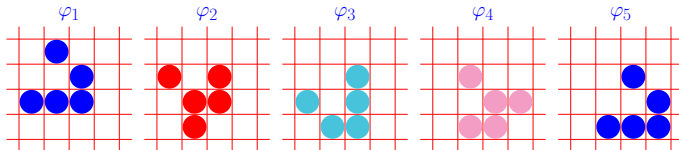
нормальное замыкание \mathbf{T}^2

$$G_{4 \times 4} = \overbrace{(((\mathbb{Z}_2 \times D_8) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_2} \rtimes \mathbb{Z}_2 \quad (\text{GAP})$$

Групповая интерпретация “планера”

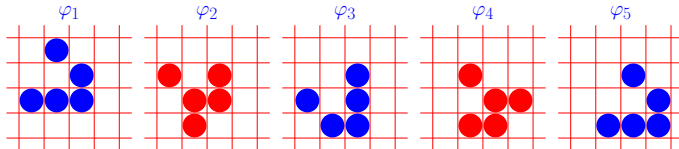
Оператор эволюции = действию группы: $\varphi_{t_b}(x) = A_{t_a t_b}(\varphi_{t_a}(x)) = \varphi_{t_a}(g_{t_a t_b}^{-1} x)$

$g_{1 \rightarrow 5} \in T^2$ — сдвиг на один шаг по диагонали



“планер” относительно группы трансляций T^2 — цикл над 4 орбитами

$g_{1 \rightarrow 3} = g_{2 \rightarrow 4} \in T^2 \times D_8$ — сдвиг вниз \rightarrow поворот на 90° \rightarrow отражение

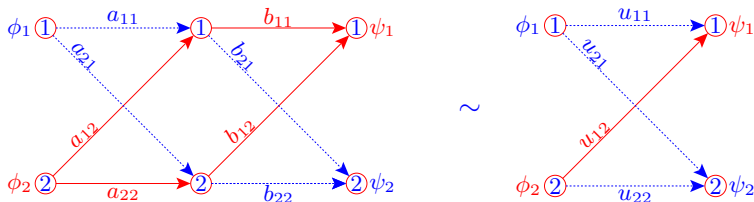


“планер” относительно группы $T^2 \times D_8$ — цикл над 2 орбитами

Фейнмановская и матричная формулировки квантовой механики

Правила Фейнмана “перемножить последовательные события” и “суммировать альтернативные истории” — перефразировка правила умножения матриц

Квантовая эволюция $|\psi\rangle = U|\phi\rangle$ $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$



$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \sim U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

$BA = U$

То же самое для обобщенных амплитуд с не $U(1)$ -значной связностью
Нужно только учесть некоммутативность матричных элементов

Финитная аппроксимируемость позволяет более формально обосновать возможность замены бесконечных групп конечными в физических задачах

(Бесконечная) группа G **финитно аппроксимируема** (*residually finite*),

если для любого $g \neq 1$ существует гомоморфизм $\phi : G \rightarrow H$

в **конечную** группу H , такой что $\phi(g) \neq 1$.

Типичный пример: **Группа кос** B_n с n нитями порождается образующими b_1, \dots, b_{n-1} , удовлетворяющими соотношениям:

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{— уравнение Янга-Бакстера,}$$

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad |i - j| \geq 2 \quad \text{— дальняя коммутативность.}$$

Группа кос — ближайший бесконечный “родственник” группы перестановок:

S_n получается из B_n , если добавить $b_i^2 = 1$

Унитарные группы:

- Теория квантовых вычислений использует универсальные конечные наборы **квантовых вентилях**, порождающие множества операторов, всюду плотных в множестве всех унитарных операторов
- **Теорема Мальцева:** всякая конечно порожденная группа матриц над любым полем **финитно аппроксимируема**

\implies Унитарные группы можно заменить конечными

безо всякого ущерба для физики как эмпирической науки

Стандартная и конечная квантовая механика

Цель – воспроизвести квантовую механику в конечной постановке

Стратегия – принцип Оккама: не вводить сущности, если без них можно обойтись

Стандартная КМ

Векторы состояния образуют гильбертово пространство \mathcal{H} над \mathbb{C}

общей унитарной группе $\text{Aut}(\mathcal{H})$ действующей на \mathcal{H}

Квантовая эволюция — унитарное преобразование
Элементарный шаг эволюции описывается уравнением

Шредингера $i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$

Конечная КМ

образуют гильбертово K -мерное пространство \mathcal{H}_K над абелевым числовым полем \mathcal{F} — расширением \mathbb{Q} с абелевой группой Галуа (подполя циклотомических полей)

унитарные операторы U принадлежат унитарному представлению U в \mathcal{H}_K конечной группы $G = \{g_1, \dots, g_M\}$

Конечное число возможных эволюций:
 $U_j \in \{U(g_1), \dots, U(g_j), \dots, U(g_M)\}$

Никакой аналог ур-ния Шредингера не нужен хотя формально можно ввести гамильтонианы

$H_j = i \ln U_j \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k U_j^k$, p — период U_j

Стандартная и конечная квантовая механика. Продолжение

- Более общие эрмитовы операторы (наблюдаемые в квантовом формализме) — элементы представления групповой алгебры:

$$A = \sum_{k=1}^M \alpha_k U(g_k)$$

- **Правило Борна**: вероятность регистрации частицы с амплитудой $|\psi\rangle$ аппаратом настроенным на $|\phi\rangle$ равна

$$P(\phi, \psi) = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle} \quad (\text{BR})$$

Концептуальное уточнение! Единственный разумный смысл вероятности для конечных множеств – частотная интерпретация: вероятность – это отношение числа избранных комбинаций к полному числу всех возможных комбинаций

Будем придерживаться принципа: формула (BR) должна выдавать рациональные числа, если все организовано правильно

Остальные элементы квантовой теории получаются буквальным переписыванием. Например, принцип Гейзенберга следует из неравенства Коши(-Буняковского-Шварца) $\langle A\psi | A\psi \rangle \langle B\psi | B\psi \rangle \geq |\langle A\psi | B\psi \rangle|^2$ эквивалентного стандартному свойству любой вероятности $P(A\psi, B\psi) \leq 1$

Вложение квантовой системы в перестановки

- 1 Любое (всегда унитарное) представление U группы G в K -мерном гильбертовом пространстве \mathcal{H}_K всегда можно вложить в представление P точной реализации G перестановками $N \geq K$ предметов:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \text{ — называется область действия}$$

- 2 Если $N > K$ то представление P в N -мерном пространстве \mathcal{H}_N имеет структуру

$$T^{-1}PT = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & V & \\ & & U \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1} \oplus V \oplus U$$

Здесь $\mathbf{1}$ - это тривиальное 1-мерное представление — обязательная компонента **любого** перестановочного представления
 V может отсутствовать

- 3 Дополнительные “**скрытые параметры**” — возникающие из-за увеличения размерности пространства от K до N — никоим образом не могут влиять на данные в пространстве \mathcal{H}_K поскольку как \mathcal{H}_K так и его дополнение в \mathcal{H}_N являются **инвариантными подпространствами** расширенного пространства \mathcal{H}_N

Две возможные интерпретации вложения в перестановки

- \mathcal{H}_K — пр-во исходного **унитарного** представления U группы G
- \mathcal{H}_N — пр-во **перестановочного** представления P
- $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_K \oplus \mathcal{H}_{N-K}$ — разложение на **инвариантные** подпр-ва
- \mathcal{F} — **поле** общее для всех пространств

Альтернативные предположения

- 1 **тривиальное**: компоненты векторов состояния — произвольные элементы \mathcal{F} , так что можно установить произвольные (например, нулевые) данные в дополнении \mathcal{H}_{N-K}
 \Rightarrow воспроизводится (с точностью до ненаблюдаемых различий между “конечным” и “бесконечным”) **стандартная квантовая механика**
- 2 **натуральное**: элементы области Ω имеют физический смысл (“частицы”) и квантовые амплитуды (“волны”) происходят из счетчиков вхождений этих элементов в состояние системы
 \Rightarrow весь формализм квантовой механики можно вывести всего лишь из **двух изначальных концепций**:
 - ▶ натуральные числа — **счетчики**
 - ▶ корни из единицы — алгебраическое воплощение **периодичности**

Натуральные квантовые амплитуды

- Перестановочное представление P имеет смысл над любой системой чисел, содержащей 0 и 1
- Наиболее естественный выбор — **полукольцо** натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Имея \mathbb{N} можно приписать каждому $\omega_i \in \Omega$ **счетчик** n_i интерпретируемый как **“кратность вхождения”** ω_i в систему, содержащую элементы из Ω
 \Rightarrow **состояние** системы можно представить **“натуральным”** вектором

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix} \in \text{N-мерный модуль } H_N \text{ над полукольцом } \mathbb{N}$$

Мы имеем представление группы G в **модуле** H_N

Модуль H_N можно превратить в **пространство** \mathcal{H}_N расширив \mathbb{N} до поля \mathcal{F}

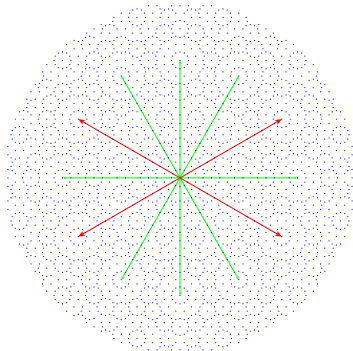
Минимально достаточное расширение – это подполе некоторого **циклотомического** поля: $\mathcal{F} \leq \mathbb{Q}_p$

Линейные представления и циклотомические числа

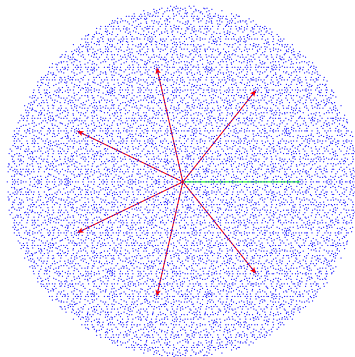
- 1 Все собственные значения линейных представлений групп G — \mathcal{P} -е корни из единицы, период \mathcal{P} зависит от структуры G
- 2 Мы вводим циклотомические натуральные $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$ — линейные комбинации корней из 1 с натуральными коэффициентами
 - ▶ если $\mathcal{P} \geq 2$ то $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$ совпадает с кольцом циклотомических целых $\mathbb{Z}[r] / \langle \Phi_{\mathcal{P}}(r) \rangle$ $\Phi_{\mathcal{P}}(r)$ — \mathcal{P} -й циклотомический полином
 - ▶ в частности, целые \mathbb{Z} можно вывести из натуральных \mathbb{N} с помощью расширения примитивным квадратным корнем из 1
- 3 Циклотомическое поле $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ — это поле частных кольца $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$
 $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ представляет собой $\varphi(\mathcal{P})$ -мерное векторное пр-во над \mathbb{Q}
 $\varphi(\mathcal{P})$ — функция Эйлера (тотиент)
В конкретных задачах может оказаться достаточным подполе $\mathcal{F} \leq \mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ — абелево числовое поле, фиксируемое в $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ определенными симметриями (автоморфизмами Галуа)

Погружение циклотомических целых \mathbb{N}_P в комплексную плоскость \mathbb{C}

$P = 12$



$P = 7$



Красные (зеленые) стрелки — примитивные (непримитивные) корни

Комплексное сопряжение в \mathbb{N}_P определяется правилом $\overline{r^k} = r^{P-k}$

Циклотомические дроби (элементы поля \mathbb{Q}_P) плотно заполняют \mathbb{C} при $P \geq 3$

Борновские вероятности в инвариантных подпространствах перестановочного пространства

Вычисление **квантовых интерференций** в подпространствах

Обозначения:

$1, \dots, U_i, \dots, U_K$ — **различные неприводимые** компоненты в перестановочном представлении P

d_i — **размерность** U_i

m_i — **кратность** U_i в P

I_n — **единичная** $n \times n$ матрица

B_i — **произвольная** $m_i \times m_i$ матрица

\otimes — **произведение Кронекера**

A — матрица централизованной алгебры: $PA = AP$

Расщепление P на неприводимые

$$T^{-1}PT = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{m_i} \otimes U_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{m_K} \otimes U_K \end{pmatrix}$$

Расщепление централизованной алгебры

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_i \otimes I_{d_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_K \otimes I_{d_K} \end{pmatrix}$$

Алгоритмические трудности
алгоритм Паркера **MeateAxe**
существенно модулярный,
не работает в характеристике 0

Наш подход основан на тождестве

$$\det(A) = \det(B_1) \cdots \det(B_i)^{d_i} \cdots \det(B_K)^{d_K}$$

$$\iff \det(X \otimes Y) = \det(X)^m \det(Y)^n$$

X и Y — $n \times n$ и $m \times m$ матрицы

Алгоритм

- 1 **Базисные** матрицы $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_R$ централизованной алгебры легко вычисляются через **орбиталы** — орбиты G на $\Omega \times \Omega$
- 2 Применение алгоритма “**абсолютной факторизации**” полиномов к определителю общей комбинации матриц \mathcal{A}_i приводит к следующему разложению над некоторым кольцом циклотомических целых

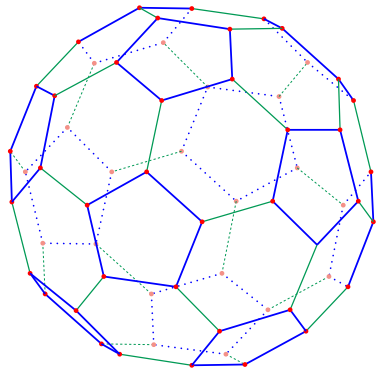
$$\det \sum_{i=1}^R a_i \mathcal{A}_i = \prod_{k=1}^K E_k(a_1, \dots, a_R)^{d_k}, \quad \deg E_k(a_1, \dots, a_R) = m_k$$

$E_k(a_1, \dots, a_R)$ — однородный неприводимый **элементарный полином**
 d_k — **размерность**
 m_k — **кратность** } k -й неприводимой компоненты представления P

- 3 Остаток задачи сводится к решению системы однородных полиномиальных уравнений
Если все кратности $= 1$,
задача особенно проста — все уравнения линейны

Группа икосаэдра A_5 . Основные свойства

- Наименьшая простая некоммутативная группа
- Важная роль в математике и приложениях:
Ф. Клейн посвятил целую книгу "*Vorlesungen über das Ikosaeder*", 1884
- "Физическое воплощение": молекула фуллерена C_{60} "—" графу Кэли A_5



- Порождающие элементы и реляторы

$$\langle a, b \mid a^5, b^2, (ab)^3 \rangle$$

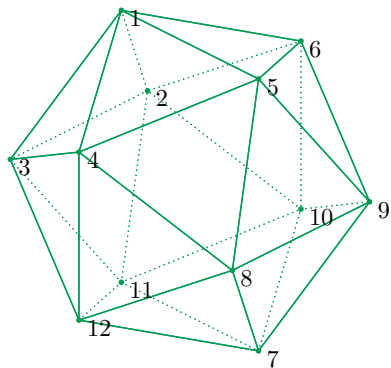
- 5 неприводимых представлений:

$$1, 3, 3', 4, 5$$

- 3 примитивных перестановочных:

$$\underline{5} \cong 1 \oplus 4, \underline{6} \cong 1 \oplus 5, \underline{10} \cong 1 \oplus 4 \oplus 5$$

Действие A_5 на икосаэдре



- Действие на 12 вершинах транзитивно но импримитивно

Система импримитивности

$$\begin{array}{ccccccc} B_1 & \cdots & B_i & \cdots & B_6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1, 7) & \cdots & (i, i+6) & \cdots & (6, 12) \end{array}$$

блоки — пары противоположных вершин

- Разложение на неприводимые компоненты

$$\underline{12} \cong 1 \oplus 3 \oplus 3' \oplus 5$$

Матрица, расщепляющая действие A_5 на икосаэдре

Унитарная матрица T такая что $T^{-1}(\underline{12})T = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \alpha & \beta & 0 & \alpha & \beta & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \alpha & \beta & -\beta & 0 & \alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \beta & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & -\beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \alpha & -\beta & -\beta & 0 & -\alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\beta & 0 & \alpha & 0 & \alpha & -\beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \alpha & -\beta & 0 & -\alpha & \beta & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\alpha & \beta & \beta & 0 & \alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \beta & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \delta \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\alpha & \beta & 0 & \alpha & -\beta & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\alpha & -\beta & 0 & -\alpha & -\beta & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\alpha & -\beta & \beta & 0 & -\alpha & -\frac{\phi}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\beta & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & \beta & \frac{\phi-1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \delta \end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ — "золотое сечение"}, \quad \alpha = \frac{\phi}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{20},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad \delta = -\frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Иррациональности в терминах циклотомик из $\mathcal{F} \leq \mathbb{Q}_{60}$

Автоморфизм Галуа $r \rightarrow r^{59}$, r — примитивный 60-й корень из 1
циклотомический полином $\Phi_{60}(r) = 1 + r^2 - r^6 - r^8 - r^{10} + r^{14} + r^{16}$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{6} (2r^5 - r^{15}),$$

$$\frac{\phi}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} (r + r^3 - r^9 - r^{11} + r^{15}),$$

$$\frac{\sqrt{5} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{20} = \frac{1}{2} (r + 4r^3 - 3r^9 - r^{11} + 2r^{15}),$$

$$-\frac{\phi}{4} = \frac{1}{4} (-r^4 - r^6 + r^{14}),$$

$$\frac{\phi - 1}{4} = \frac{1}{4} (-1 + r^4 + r^6 - r^{14}),$$

$$\frac{\sqrt{15}}{12} = \frac{1}{12} (-2r + 2r^5 + 4r^7 + 2r^9 + 2r^{11} - 4r^{13} - 3r^{15}),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{12} (r + 2r^5 - 2r^7 - r^9 - r^{11} + 2r^{13}),$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{12} (r - 4r^5 - 2r^7 - r^9 - r^{11} + 2r^{13} + 3r^{15}).$$

Расщепление скалярного произведения факторизацией определителя

① **Общая** форма $A = a_1 \mathcal{A}_1 + a_2 \mathcal{A}_2 + a_3 \mathcal{A}_3 + a_4 \mathcal{A}_4$

② Абсолютная **факторизация**

$$\det A = (a_1 + a_2 + 5a_3 + 5a_4)$$

$$\left\{ a_1 - a_2 - (1 + 2r^2 + 2r^3) a_3 + (1 + 2r^2 + 2r^3) a_4 \right\}^3$$

$$\left\{ a_1 - a_2 + (1 + 2r^2 + 2r^3) a_3 - (1 + 2r^2 + 2r^3) a_4 \right\}^3$$

$$(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^5$$

структура P видна сразу $\underline{12} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}$

r — примитивный 5-й корень из 1

циклотомическое целое $1 + 2r^2 + 2r^3 \equiv \sqrt{5} \in \mathbb{N}_5$

③ Решение 4-х систем линейных уравнений дает

инвариантные формы в неприводимых подпространствах

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{12} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4)$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{1}{4} \left(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_3 + \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

$$\mathcal{B}_{3'} = \frac{1}{4} \left(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_3 - \frac{1 + 2r^2 + 2r^3}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

$$\mathcal{B}_5 = \frac{5}{12} \left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \frac{1}{5} \mathcal{A}_3 - \frac{1}{5} \mathcal{A}_4 \right)$$

Скалярные произведения проекций натуральных амплитуд

$n = (n_1, \dots, n_{12})^T$, $m = (m_1, \dots, m_{12})^T$ — **натуральные** векторы
 Ψ_α и Φ_α — их **проекции** в инвариантные подпространства

$$\textcircled{1} \quad \langle \Phi_1 | \Psi_1 \rangle = \frac{1}{12} \{ \mathcal{A}_1(m, n) + \mathcal{A}_2(m, n) + \mathcal{A}_3(m, n) + \mathcal{A}_4(m, n) \} \equiv \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} m_k \sum_{l=1}^{12} n_l$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \Phi_{3 \oplus 3'} | \Psi_{3 \oplus 3'} \rangle = \frac{1}{2} \{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) \}$$

$$\textcircled{1} \quad \langle \Phi_3 | \Psi_3 \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) + \frac{\sqrt{5}}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) - \mathcal{A}_4(m, n)) \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \Phi_{3'} | \Psi_{3'} \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{A}_1(m, n) - \mathcal{A}_2(m, n) - \frac{\sqrt{5}}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) - \mathcal{A}_4(m, n)) \right\}$$

иррациональности — **следствия импримитивности**: невозможно сдвинуть вершину икосаэдра без одновременного движения противоположной вершины

$$\textcircled{3} \quad \langle \Phi_5 | \Psi_5 \rangle = \frac{5}{12} \{ \mathcal{A}_1(m, n) + \mathcal{A}_2(m, n) - \frac{1}{5} (\mathcal{A}_3(m, n) + \mathcal{A}_4(m, n)) \}$$

$$\mathcal{A}_1(m, n) = \sum_{k=1}^{12} m_k n_k \quad \mathcal{A}_2(m, n) = \sum_{k=1}^{12} m_k n_{k^C}$$

$$\mathcal{A}_3(m, n) = \sum_{k=1}^{12} m_k \sum_{i \in N(k)} n_i \quad \mathcal{A}_4(m, n) = \sum_{k=1}^{12} m_k \sum_{i \in N(k^C)} n_i$$

k^C — вершина, противоположная k

$N(k)$ — окрестность вершины k

Заключение

Основные темы доклада

- 1 Дискретные динамические системы с симметриями
- 2 Дискретная версия принципа калибровочной инвариантности
- 3 Соотношение между дискретными системами и их континуальными аппроксимациями: возникновение пространственно-временных структур, непрерывных симметрий и т.д.
- 4 Специфика поведения детерминистических дискретных систем: солитоноподобные структуры, обратимость, унитарность и т.д.
- 5 Конструктивный анализ квантовомеханического поведения

Выводы из анализа конечной версии квантовой механики:

- **Квантовое поведение** — результат фундаментальной невозможности проследить идентичность неразличимых объектов в процессе эволюции
- Любую квантовомеханическую проблему можно свести к **перестановкам**
- **Квантовые интерференции** — явления, наблюдаемые в инвариантных подпространствах перестановочных представлений
наблюдаемые величины — комбинации перестановочных инвариантов
- Натуральная интерпретация квантовых амплитуд ("**волн**") как векторов кратностей элементов, подвергаемых перестановкам ("**частиц**"), приводит к **рациональным** борновским вероятностям в соответствии с **частотной интерпретацией** вероятности для конечных множеств